Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике 2019-2020 учебный год

11 класс

Решения задач. Критерии оценивания.

1. Известно, что график функции

$$y = x^6 - 10x^5 + 24x^4 - 4x^3 + ax^2,$$

где a — некоторая константа, лежит по одну сторону от некоторой прямой, имея с ней три общие точки. Найдите абсциссы точек касания.

Ответ: такой прямой нет.

Решение. Пусть уравнение искомой касательной $y = bx + c$. Тогда для любого x

$$x^6 - 10x^5 + 24x^4 - 4x^3 + ax^2 \geqslant bx + c,$$

причём равенство достигается только в трёх точках, которые обозначим x_1, x_2, x_3 (их и требуется найти!). Это означает, что многочлен $P(x) = x^6 - 10x^5 + 24x^4 - 4x^3 + ax^2 - bx - c$ имеет три действительных корня x_1, x_2, x_3, причём каждый — чётной кратности. Отсюда следует, что справедливо тождество

$$x^6 - 10x^5 + 24x^4 - 4x^3 + ax^2 - bx - c = (x - x_1)^2(x - x_2)^2(x - x_3)^2.$$

Рассмотрим многочлен

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3.$$

Тогда

$$x^6 - 10x^5 + 24x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + c = (x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3)^2.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$2p_1 = -10; \quad p_1^2 + 2p_2 = 24; \quad 2p_3 + 2p_1p_2 = -4.$$

Отсюда $p_1 = -5$, $p_2 = -\frac{1}{2}$, $p_3 = -\frac{9}{2}$. Числа x_1, x_2, x_3 — корни уравнения

$$p(x) = x^3 - 5x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{9}{2} = 0.$$

Запишем $p(x)$ в виде $p(x) = x^2(x-5) - \dfrac{x+9}{2}$. Отсюда видно, что при $x \in (-9; 5)$ выполнено неравенство $p(x) < 0$. Корни производной $p'(x) = 3x^2 - 10x - \frac{1}{2}$ равны $\frac{10 \pm \sqrt{106}}{6}$ и попадают в промежуток $(-9; 5)$. Поэтому на каждом из промежутков $(-\infty; -9]$ и $[5; +\infty)$ функция $p(x)$ возрастает. Поскольку $p(-9) < 0$, на промежутке $(-\infty; -9]$ нет корней. На промежутке $[5; +\infty)$ есть единственный корень. Итак, уравнение $p(x) = 0$ имеет ровно один корень, а не три. Значит, искомой прямой не существует.

Критерии оценивания. За верное решение 7 б. За нахождение многочлена $x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3$ — 4 б.

2. В клетках таблицы 3×3 расставлены числа 1, 0 и -1. В каждой строке и в каждом столбце сосчитали сумму чисел. Докажите, что какие-то два числа из этих шести чисел равны.

Решение.Пусть все суммы различны. Возможные значения сумм – числа от -3 до 3. Так как все суммы различны, то ровно одно из этих чисел отсутствует в списке сумм. Найдем сумму всех сумм: она четна, т.к. каждое из чисел таблицы будет сосчитано дважды. Значит, числа 3 и -3 есть в списке сумм. Пусть 3 – сумма чисел в строке; тогда и -3 – также сумма чисел в строке. Но тогда в оставшейся строке все числа различны (и равны1, -1 и 0). Получили строку с нулевой суммой, и столбец с такой же суммой. Противоречие.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. Решения, основанные на переборе вариантов, в случае неполного перебора – 0 баллов.

3. Можно ли купюру в 2019 тугриков разменять ровно на 100 монет достоинствами в 10, 29, 48 и 67 тугриков?

Ответ: нет.

Решение. Имеем систему уравнений x+y+z+u =100, 10x+29y+48z+67u = 2019. Вычитая из второго уравнения первое, умноженное на 10, получим 19y +38z +57u = 1019. Левая часть делится на 19, а правая - нет…

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. Правильный ответ без обоснования – 0 баллов.

4. Компьютерный мастер Мурат разработал антивирусную программу «Очистка пенсионеров за 300 р.». При проверке диска эта программа удаляет один вирус бесплатно (бонус от Мурата!). Если количество оставшихся вирусов делится на 3, то программа удаляет каждый третий из них, в противном случае вирусы удаляются все. Диск пенсионера У. был полностью очищен от вирусов только после пятого применения этой программы. Хватит ли пенсионеру У. его пенсии (15000 р.) для оплаты услуги по очистке диска, если Мурат берет по 300 р. за каждый удаленный вирус (кроме бонусных), но пенсионерам делает скидку в 30%?

Ответ: не хватит.

Решение. Пусть на диске было n-2 вируса. Тогда: n делится на 3, n=3k, и после работы программы вирусов останется 2k-2. Повторяя эти же рассуждения, получим, что и число k делится на 3, и т.д. В итоге получим, что nделится на 81, так что на диске было не менее 81-2=79 вирусов. Из них бонусно было удалено 5, и оплате подлежит удаление 74. Это стоит 74·300=22200 р.. С учетом скидки получаем 22200·0.7=15540 р. Пенсии не хватит.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. За угаданное минимальное общее количество вирусов (без обоснования минимальности) – 3 балла. За только ответ «не хватит» - 0 баллов.

5. Окружности ω_1 и ω_2 (радиусов 3 и 4) пересекаются в точках A иB. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает эти окружности в точках Pи Q соответственно (точка Pлежит вне окружности ω_2, точка Q – вне окружности ω_1). Найдите наибольшее возможное значение длины отрезка PQ, если расстояние между центрами окружностей равно 5.

Ответ: 10.

Решение. Угол AQB – вписанный, опирающийся на дугу, стягиваемую хордой AB, так что его величина не зависит от положения точки Q. Аналогично, величина угла APBтакже не зависит от положения точки P. Значит, все получающиеся при таком построении треугольники BPQ - подобны. Поэтому длина отрезка PQбудет наибольшей в случае когда длина хорды BP будет наибольшей (т.е., хорда эта будет диаметром). Но тогда треугольник ABP – прямоугольный, и, значит, треугольник ABQтакже является прямоугольным (так что BQ - также диаметр). Но тогда отрезок, соединяющий центры окружностей, является средней линией в треугольнике BPQ. Значит, PQ=2·5=10.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов.

Замечание.В задаче имеются лишние условия – величины радиусов.