**6 класс**

1.1) Сколько среди целых чисел от 1 до 2017 (включительно) таких, у которых сумма цифр чётна? **(ответ 1008)1 балл**

Решение.И у четного, и у нечетного числа сумма цифр может быть четной. Воспользуемся тем, что с появлением нового разряда (сотни, тысячи и т.д.) четность суммы цифр каждого числа поменяется на противоположную. Пусть в первой сотне (от 0 до 100) было $x$чисел с четной суммой цифр. Тогда в числах от 100 до 199 каждое из них станет с числом с суммой цифр на 1 больше, а значит, с противоположной суммой цифр. Значит, интересующих нас чисел там будет $100-x$. Среди чисел от 200 до 299 добавляется 2 в разряде сотен, значит, четность суммы цифр у таких чисел сохранится, то есть их будет $x$. И т.д. до 2000 мы получим, что чисел с четной суммой цифр будет $10∙x+10∙\left(100-x\right)=1000$. При этом при замене четного числа 0 с четной суммой цифр на четное число 2000 с четной суммой цифр их количество не изменится. А в остальных числах от 2001 до 2017 таких чисел будет 8, что нетрудно проверить. Итак, чисел с четной суммой цифр будет $1000+8=1008$.

1.2)Найдите наибольшее четырехзначное число, делящееся на сумму своих цифр**.(ответ 9990)1балл**

Решение.Достаточно перебрать числа от наибольшего четырехзначного 9999 в сторону уменьшения, и получим, что число 9990 – наибольшее четырехзначное число, делящееся на сумму своих цифр.

2.1) Вася сложил 140 кубиков в коробку прямоугольной формы, несколько слоев оказались заполнены полностью. Длина и ширина прямоугольника состояла более чем из одного кубика. Затем взял еще 105 кубиков и заполнил полностью еще несколько слоев. Сколько всего слоев кубиков получилось в коробке? **(ответ 7)3 балла**

Решение.У коробки прямоугольной формы есть 3 измерения: длина, ширина и высота. В данном случае высота – это и есть слои кубиков, и они увеличиваются по мере заполнения коробки. А вот длина и ширина у коробки одни и те же. Итак, $140=2∙2∙5∙7$, $105=3∙5∙7$. Очевидно, что постоянными множителями здесь будут только 5 и 7, значит, это и есть длина и ширина коробки, значит, 4 и 3 – это заполненные слои, всего их 7.

2.2) Вася открыл коробку кубиков. Сначала он снял верхний слой – 77 кубиков, затем боковой слой – 55 кубиков, наконец, передний слой. После этого в коробке кубики еще остались. Сколько кубиков осталось в коробке?**(ответ 300) 3 балла**

Решение.У коробки прямоугольной формы есть 3 измерения: длина ($a$), ширина ($b$) и высота ($c$). В данном случае высота – это и есть все слои кубиков. Запишем условие задачи на математический язык:верхний слой$a∙b=77=7∙11$, боковой слой $b∙\left(c-1\right)=55=5∙11$,передний слой$\left(a-1\right)∙(c-1)$. Тогда $b=11, a=7, c=6$. Значит, осталось $6∙7∙11-77-55-\left(7-1\right)∙\left(6-1\right)=300$ кубиков.

3.1) Треть положительного числа умножили на 36% его и получили 75. Найдите это число.**(ответ 25) 2 балла**

Решение.Составим и решим уравнение по условию задачи, считая переменной – положительное число:

$$\left(\frac{1}{3}x\right)∙\left(0,36x\right)=75$$

$$0,12x^{2}=75$$

$$x^{2}=625$$

$$x=25$$

3.2) 50% положительного числа умножили на 20% его и получили 22,5. Найдите это число.**(ответ 15) 2 балла**

Решение.Составим и решим уравнение по условию задачи, считая переменной – положительное число:

$$\left(0,5x\right)∙\left(0,2x\right)=22,5$$

$$0,1x^{2}=22,5$$

$$x^{2}=225$$

$$x=15$$

4.1) Системный блок компьютера весит столько, сколько монитор и две клавиатуры. Монитор весит как половина системного блока и клавиатура. Клавиатура весит 1 кг. Сколько килограмм весят монитор, системный блок и клавиатура вместе.**(ответ 11)3 балла**

Решение.Для краткости обозначим «системный блок» - с, «монитор» - м, «клавиатуру» - к, тогда можно перевести условие задачи на математический язык:$ с=м+2к$, $м=0,5с+к$. Заменим «клавиатуру» ее массой 1 кг, а монитор в первом уравнении соответствующей правой частью второго уравнения, тогда получим, что $с=0,5с+3$, значит, $с=6 $ (кг). Тогда «монитор» весит $м=0,5∙6+1=4$ (кг). Значит, $м+с+к=4+6+1=11$ (кг).

4.2) Апельсин и яблоко вместе весят 410г. Яблоко и груша – 400г., груша и персик – 390 г., персик и хурма 340 г., а хурма и апельсин весят 380 г. Определите какой из фруктов самый тяжелый, в ответе запишите, сколько граммов он весит? **(ответ 220) 3 балла**

Решение.Обозначим для краткости названия фруктов их первыми буквами и переведем условие задачи на математический язык: $а+я=410$, $я+г=400$, $г+п=390$, $п+х=340$, $х+а=380$. Очевидно, если сложить все левые части этих уравнений, то там будет набор из $а+я+г+п+х$, взятый дважды, значит, $а+я+г+п+х=\left(410+400+390+340+380\right) :2$, тогда $а+я+г+п+х=960$. Тогда заменив суммы масс $а+я=410$ и $г+п=390$, можно найти, что $х=160$. Значит, $п=180, г=210, я=190, а=220$. Тогда в ответ записываем массу самого тяжелого фрукта, а это апельсин, 220 граммов.

5.1) Два велосипедиста выехали навстречу друг другу из двух городов А и В. Первому ехать от А до В 3 часа, а второму от В до А 5 часов. Через сколько минут они встретятся?**(ответ 112,5) 3 балла**

Решение.Т.к. речь в задаче идет об одном и том же расстоянии, то примем его за 1 единицу расстояния. Тогда скорость первого будет $1/3$ (ед/ч), а скорость второго – 1/5 (ед/ч). Значит, их скорость сближения составит $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$ (ед/ч), тогда искомое время найдем, поделив общее для покрытия расстояние на скорость сближения $1 :\frac{8}{15}=\frac{15}{8}\left(ч\right)=1\frac{7}{8}\left(ч\right)=112,5 (мин)$.

5.2) Два мотоциклиста выехали навстречу друг другу из двух городов А и В. Доехав до конечного пункта они тут же поехали обратно. Первому ехать от А до В 2 часа, а второму от В до А 3 часа. Через сколько минут они встретятся во второй раз?**(ответ 216) 3 балла**

Решение.Т.к. речь в задаче идет об одном и том же расстоянии, то примем его за 1 единицу расстояния. Тогда скорость первого будет $1/2$ (ед/ч), а скорость второго – 1/3 (ед/ч). Значит, их скорость сближения составит $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ (ед/ч). Поскольку вместе они покрыли 3 таких расстояния, то искомое время найдем, поделив расстояние на скорость сближения: $3 :\frac{5}{6}=\frac{18}{5}\left(ч\right)=216 (мин)$.

6.1) В мешке шары трех цветов, не глядя достают по одному шару. Если достать 53 шара, среди них гарантированно окажутся шары двух цветов. Если достать 70 шаров, среди них гарантированно будут шары трех цветов. Какое наибольшее количество шаров может быть в мешке?**(ответ 86) 4 балла**

Решение.Т.к. в группе из 53 шаров будет гарантированно два цвета, то в худшем случае в наборе из 52 шаров все 52 шара могут оказаться одного цвета. Опишем худший случай для второго условия. Если достать какие-нибудь 69 шаров, то в ней будет только 2 цвета, а в любой группе из 70 шаров точно будут все три цвета. Значит, нужно еще по $69-52=17$ шаров второго и третьего цветов для выполнения этого условия. Тогда всего шаров будет $52+17+17=86$.

 Посовещавшись, методическая комиссия приняла следующее решение: если учащиеся учли только второе условие для выполнения в худшем случае (не учли, что оба эти условия должны выполняться в худшем случае), то задача вообще-то не решена. Но, учитывая юный возраст учащихся, ответ «103» засчитать как верный.

6.2) В мешке 73 шара трех цветов. Известно: если достать 62 шара, то среди них гарантированно окажутся шары трех цветов. Сколько шаров нужно достать, чтобы среди них гарантированно оказались шары двух цветов.**(ответ 50) 4 балла**

Решение.Опишем худший случай. Он заключается в том, что если достать 62 шара, то среди них точно будут шары всех 3-х цветов, а если достать 61 шар (найдется такая группа шаров), то там будут шары только двух цветов. Это возможно, если 49 шаров первого цвета и по 12 шаров второго и третьего. При этом 49 – это максимально возможное такое число шаров. Тогда если мы достанем любую группу из $50$ шаров, то в ней точно будет (даже в худшем случае, где все 49 шаров первого цвета уже выбраны) хотя бы 1 шар другого цвета.

7.1) Девять одинаковых попугаев за 5 минут склёвывают меньше, чем 1001 зёрнышко, а 10 таких же попугаев за то же время склёвывают больше, чем 1100 зёрнышек. Сколько зёрнышек склёвывает каждый попугай за 5 минут?**(ответ 111) 4 балла**

Решение.Т.к. речь в задаче идет об одном и том же временном периоде (5 минут), то примем его за 1 отрезок времени. Тогда если один попугай за 1 отрезок времени съедает $x$зернышек, тогда 9 таких попугаев съедят $9x$ зернышек, а 10 попугаев – $10x$ зернышек. Тогда $9x<1001$, значит $x<\frac{1001}{9}$, то есть $x<111\frac{2}{9}$, и $10x>1100$, тогда $x>110$. Воспользуемся двойным неравенством для записи общего условия: $110<x<111\frac{2}{9}$ , значит, $x=111$зернышек.

7.2) Одиннадцать одинаковых мышек за 7 минут съедают больше, чем 1600 зёрнышек, а двенадцать таких же мышек за то же время съедают меньше, чем 1760 зёрнышек. Сколько зёрнышек съедают семь мышек за 1 минуту?**(ответ 146 ) 4 балла**

Решение.Т.к. речь в задаче идет об одном и том же временном периоде (7 минут), то примем его за 1 отрезок времени. Тогда если одна мышка за 1 отрезок времени съедает $x$зернышек, тогда 11 таких мышек съедят $11x$ зернышек, а 12 мышек – $12x$ зернышек. Тогда $12x<1760$, значит $x<\frac{1760}{12}$, то есть $x<146\frac{8}{12}$, и $11x>1600$, тогда $x>\frac{1600}{11}$, то есть $x>145\frac{5}{11}$. Воспользуемся двойным неравенством для записи общего условия: $145\frac{5}{11}<x<146\frac{8}{12}$ , значит, $x=146$зернышек.

8.1) Имеются карточки с цифрами 0; 1; 2; 4; 6; 7. Сколько можно составить из этих карточек трехзначных чисел, делящихся на 9? **(ответ 10) 2 балла**

Решение.Для того, чтобы число делилось на 9, необходимо, чтобы сумма его цифр делилась на 9. Сумма всех цифр равна 20, значит, интересующие нас суммы – это 18 и 9. Для 18 нужно убрать только карточку 2, значит, останется 5 карточек, то есть больше, чем трехзначное число. Выпишем все комбинации из карточек, дающие сумму цифр 9: 0, 2, 7 или 1, 2, 6. В первом случае таких чисел можно составить $2∙2∙1=4$ числа, во втором – $3∙2∙1=6$ чисел, значит, всего таких чисел 10. Но если карточку с цифрой «6» перевернуть, получим цифру «9». Тогда добавляются еще 6 вариантов (для тройки карточек 9, 7, 2), т.е. их всего будет 16. Принято решение засчитывать оба ответа.

8.2) Имеются карточки с цифрами 0; 2; 4; 6; 7. Сколько можно составить из этих карточек трехзначных чисел, делящихся на 3? **(ответ 20) 2 балла**

Решение.Для того, чтобы число делилось на 3, необходимо, чтобы сумма его цифр делилась на 3. Сумма всех цифр равна 19, значит, интересующие нас суммы – это 3, 6, 9, 12, 15 и 18. Из наших карточек можно получить только суммы 6, 9,12 и 15. Выпишем все комбинации из карточек, дающие сумму цифр 6: 0, 2, 4. Таких чисел можно составить $2∙2∙1=4$. Выпишем все комбинации из карточек, дающие сумму цифр 9: 0, 2, 7. Таких чисел можно составить $2∙2∙1=4$. Выпишем все комбинации из карточек, дающие сумму цифр 12: 2, 4, 6. Таких чисел можно составить $3∙2∙1=6$. Выпишем все комбинации из карточек, дающие сумму цифр 15: 2, 6, 7. Таких чисел можно составить $3∙2∙1=6$. Значит, всего таких чисел можно составить $4+4+6+6=20$.Но если карточку с цифрой «6» перевернуть, получим цифру «9». Тогда добавляются еще 12 вариантов (для троек карточек 9, 7, 2 и 9,2,4), т.е. их всего будет 32. Принято решение засчитывать оба ответа.