**5 класс**

* 1. Число 1234567809\* делится на 12. Какая цифра должна стоять вместо «звездочки»? В ответ запишите эту цифру, если таких цифр несколько, в ответ запишите их сумму.**(ответ 6) 1 балл**

Решение. Для того, чтобы число стало кратно 12, оно должно быть кратно 3 и 4. Для первого условия необходимо, чтобы сумма цифр была кратна 3. Поэтому возможны только цифры 0, 3, 6 и 9. А для кратности 4 нужно, чтобы число, образованное последними двумя цифрами, было кратно 4. Из образовавшихся чисел только 96 кратно 4. Значит, вместо звездочки должна стоять цифра 6.

* 1. Число 12345678093\* делится на 18. Какая цифра должна стоять вместо «звездочки»? В ответ запишите эту цифру, если таких цифр несколько, в ответ запишите их сумму.**(ответ 6) 1 балл**

Решение. Для того, чтобы число стало кратно 18, оно должно быть четным и кратным 9. Для кратности 9 необходимо, чтобы сумма цифр этого числа была кратна 9. Из всех четных цифр обоим условиям удовлетворяет только цифра 6.

2.1) Имеются карточки с цифрами 0; 1; 2; 3. Сколько можно составить трехзначных нечетных чисел из этих карточек? **(ответ 8) 2 балла**

Решение. Воспользуемся правилом произведения: 1) число должно быть нечетным, значит, на место младшего разряда возможно поставить любую нечетную цифру (т.е. 2 варианта: 1 или 3); 2) на место старшего разряда можно поставить любую ненулевую цифру (2 варианта: 2 или оставшуюся из свободных цифр 1 или 3); 3) далее остается еще разряд десятков, здесь возможно 2 варианта (цифра 0 или одна из оставшихся цифр после пункта 2). Итого, $2∙2∙2=8$трехзначных чисел.

2.2) Имеются карточки с цифрами 0; 1; 2; 3. Сколько можно составить трехзначных четных чисел из этих карточек? **(ответ 10) 2 балла**

Решение. Воспользуемся правилом произведения: 1) на последнее место можно поставить любую четную цифру (2 варианта: 0 или 2). Но в зависимости от выбранной цифры меняется и количество возможных вариантов для остальных разрядов. Поэтому рассмотрим оба варианта отдельно. Если на последнем разряде стоит цифра «0», тогда: 1) для старшего разряда подойдет любая из оставшихся цифр, т.к. они все ненулевые (3 варианта: 1, 2 или 3); 2) на разряд десятков подойдет любая из еще невыбранных двух цифр (2 варианта, оставшиеся после пункта 1). Итого, $3∙2∙1=6$ таких чисел. Если на месте последнего разряда стоит цифра «2», тогда: 1) для старшего разряда подойдет любая из оставшихся ненулевых цифр (2 варианта: 1 или 3); 2) на разряд десятков подойдет 2 варианта (цифра 0 или оставшаяся из цифр 1 или 3 после пункта 1). Итого, $2∙2∙1=4$таких числа. Значит, всего таких чисел $6+4=10$.

3.1) Дорогу длиной 51 километр разделили на три неравные части. Расстояние между серединами крайних частей равно 36 км. Найдите длину средней части. Ответ запишите в километрах. **(ответ 21) 3 балла**

Решение.На чертеже отмечены равные отрезки одинаковой штриховкой, поэтому сразу видно, что разность $51-36=15$ (см) – это сумма половинок крайних отрезков пути. Значит, $36-15=21$ (см) – искомая длина средней части пути.

3.2) На веревке сделали три отметки, на неравном расстоянии. Длина средней части 125см. Расстояние между серединами крайних частей равно 296см. Сколько сантиметров вся веревка? **(ответ 467) 3 балла**

Решение. На чертеже отмечены равные отрезки одинаковой штриховкой, поэтому сразу видно, что разность $296-125=171$ (см) – это половинок крайних частей веревки. Значит, длина всей веревки $296+171=467$ (см).

4.1) Аня кушала большой вкусный торт, массой 450 г. Когда она съела половину, она ушла смотреть мультфильм. Пока Ани не было, торт кушал её брат. Вернувшись, девочка увидела, что от торта осталась половина той части, которую скушал брат. Сколько грамм торта съела Аня, если, возвратившись, она доела его? **(ответ 300) 4 балла**

Решение. Т.к. когда вернулась Аня, то от торта осталась половина того, что съел брат, значит, осталась лишь третья часть от половины всего торта. Тогда Аня съела половину и еще треть торта, т.е. $225+\frac{1}{3}∙225=300$(г).

4.2)Таня кушала большой спелый арбуз. Когда она съела треть его, она ушла смотреть мультфильм. Пока Тани не было, арбуз кушал её брат. Вернувшись, девочка увидела, что от арбуза осталась треть той части, которую скушал брат. Какую часть от всего арбуза съела Аня, если, возвратившись, она доела его? Ответ запишите десятичной дробью**. (ответ 0,5) 4 балла**

Решение. Т.к. вернувшись, Таня увидела лишь треть того, что съел брат, значит, ей осталось доесть четвертую часть от $\frac{2}{3}$ арбуза, которые остались после того, как она ушла смотреть мультфильм. Тогда она съела треть арбуза и еще четверть от $\frac{2}{3}$ арбуза, т.е. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}∙\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}=0,5$.

5.1) В мешке 35 белых шаров, 15 черных и 20 синих. Мальчик наугад вынимает шары. Сколько шаров ему нужно вынуть, чтобы гарантированно достать шары трех цветов. **(ответ 56) 2 балла**

Решение.Попробуем найти худший случай. Если из 55 шаров мальчик вытянет все белые и все синие шары, то ни одного черного шара среди них не будет. Тогда следующий (56-ой) шар обязательно будет черным.

5.2) В мешке 35 белых шаров, 15 черных и 1 синий. Мальчик наугад вынимает шары. Сколько шаров ему нужно вынуть, чтобы гарантированно достать шары трех цветов. **(ответ 51) 2 балла**

Решение.Найдем худший случай. Если из 50 шаров мальчик вытянет все белые и все черные шары, то ни одного синего шара среди них не будет. Тогда следующий (51-ой) шар обязательно будет синим.

6.1) Ученик Вася любит решать математические задачи. Известно, что вчера он решил на 14 задач меньше, чем позавчера и на 37 задач меньше, чем позавчера и сегодня вместе. Сколько задач решил Вася сегодня? **(ответ 23) 3 балла**

Решение. Если с помощью отрезков изобразить, сколько Вася решил вчера и сколько он решил сегодня, то на картинке сразу становится видно, что 37 задач – это задачи, решенные сегодня да еще 14 задач, значит, сегодня было решено 23 задачи.

6.2) Анфиса решила, начиная с 9 марта каждый день решать математические задачи. Известно, что 11 марта она решила на 15 задач больше, чем 10 марта, и на 7 задач меньше, чем 10 и 9 вместе. Сколько задач решила Анфиса 9 марта? **(ответ 22) 3 балла**

Решение. Если с помощью отрезков изобразить, сколько Анфиса решила 9 марта и 10 марта, то сразу становится видно, что 15 задач – это разность задач, решенных 9 марта, и 7 задач, значит, только за 9 марта было решено 22 задачи.

7.1)Среди натуральных чисел 1, 2, ..., *А (от одного до А)* ровно восемь чисел делятся на 6 и ровно шесть чисел делятся на 7. Найдите число *А*. **(ответ 48) 3 балла**

Решение.Числа, кратные 6, встречаются в натуральном ряде через каждые 6 шагов, а т.к. мы двигаемся от 1, значит, $6∙8=48$ – последнее такое кратное число, и нас теперь будет интересовать промежуток от 48 до 53. Среди этих чисел, начиная с числа 49, уже будет 7 чисел, кратных 7. Значит, искомое число 48.

7.2)Одометр на автомобиле показывает пробег в 187569 км. Все цифры этого числа различны. Через какое количество километров такая ситуация повторится снова? **(ответ 21) 3 балла**

Решение. Очевидно, что переход через разряд приведет к тому, что сначала повторится цифра 7 (она появится в разряде десятков), а потом цифра 8 (в том же разряде). Но как только она станет равной 9, все цифры снова станут различными. Тогда наше искомое число – это 187590, тогда искомая разность $187590-187569=21$ (км).

8.1) В шкатулке лежали пуговицы. Их количество утроили, а затем убрали 27 пуговиц. Остаток снова утроили, а затем снова отняли 27 пуговиц. Когда эту операцию проделали в третий раз, то в шкатулке не осталось ни одной пуговицы. Сколько пуговиц было сначала? **(ответ 13) 4 балла**

Решение. Составим и решим уравнение по условию задачи, считаяпеременную$x$ количеством пуговиц, которые лежали в шкатулке первоначально:

$$\left(\left(3x-27\right)∙3-27\right)∙3-27=0$$

$$\left(\left(3x-27\right)∙3-27\right)∙3=27$$

$$\left(3x-27\right)∙3-27=9$$

$$\left(3x-27\right)∙3=36$$

$$3x-27=12$$

$$x=13$$

8.2) Два разбойника играли на золотые монеты. Сначала второй проиграл половину своих монет (отдал первому), потом первый проиграл половину своих, потом снова второй проиграл половину своих. В результате у первого оказалось 20 монет, а у второго – 11. Сколько монет было у первого пирата до начала игры? **(ответ 5) 4 балла**

Решение. Для начала разберемся с условием задачи: так как каждый раз проигравший отдавал половину своих денег, значит, у него тоже оставалась половина. А теперь будем решать задачу с конца (см. таблицу). Последним проигравшим оказался второй, значит, его 11 монет – это половина того, что у него было на3-ем этапе игры, значит, у него было $11∙2=22$ монеты. Тогда у первого на этом же этапе было $20-11=9$ монет. На 2-ом этапе проиграл первый, значит, оставшиеся у него 9 монет – это половина того, что у него было в начале 2-го этапа, значит, у него было $9∙2=18$ монет. Тогда у первого было до выигрыша $22-9=13$ монет. На 1-ом этапе проиграл второй, значит, оставшиеся 13 монет – это половина того, что было у него в начале игры. Значит, столько же он отдал первому, когда проиграл. Значит, у первого игрока было $18-13=5$ монет до начала игры.

|  |  |
| --- | --- |
| 1-ый | 2-ой |
| 5 | 26 |
| 18 | 13 |
| 9 | 22 |
| 20 | 11 |