Школьный этап олимпиады по математике

Октябрь 2019 г.

11 класс

1 блок

1. Аля и Валя бежали полумарафон. Аля пробежала его со средней скоростью 12 км/ч. Валя первую половину дистанции бежала со средней скоростью x км/ч, а на второй половине дистанции её средняя скорость выросла на 20%. Аля и Валя финишировали одновременно. Найдите x.

Ответ: 11.

Решение. Пусть S — длина полумарафона. Тогда $\frac{2S}{12} = \frac{S}{x} + \frac{S}{1{,}2x}$, или $\frac{2S}{12} = \frac{2{,}2S}{1{,}2x}$. Отсюда $x = \frac{2{,}2 \cdot 12}{2 \cdot 1{,}2} = 11$.

2. Найдите 150-ю цифру после запятой в десятичной записи числа 1/7.

Ответ: 7.

Решение. Десятичная запись числа 1/7 имеет период длиной 6:

$$1/7 = 0{,}(142857).$$

Поскольку 150 делится на 6, 150-й цифрой будет последняя цифра периода.

3. Пусть $\begin{cases} x(x+y+z) &= 7; \\ y(x+y+z) &= 14; \\ z(x+y+z) &= 28. \end{cases}$ Вычислите $|xyz|$.

Ответ: 8.

Решение. После сложения уравнений получим $(x+y+z)^2 = 49$, откуда $x+y+z = \pm 7$. Поэтому система имеет два решения: $(1, 2, 4)$ и $(-1, -2, -4)$.

4. Найдите наименьший корень уравнения

$$\sqrt{x^3 + 4x - 1 - 8\sqrt{x^4 - x}} = \sqrt{x^3 - 1} + 2\sqrt{x}.$$

Ответ: 1.

Решение. После возведения в квадрат и упрощения получим уравнение $12\sqrt{x^4 - x} = 0$, откуда $x = 0$ или 1, но первый корень — посторонний. Единственный корень уравнения $x = 1$.

5. Вычислите $\dfrac{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}{1 - 2\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} + \operatorname{tg}^4 \frac{\pi}{8}}$.

Ответ: 0,25.

Решение. Вспомнив формулу тангенса двойного угла, получим

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}{1 - 2\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} + \operatorname{tg}^4 \frac{\pi}{8}} = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}{\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}\right)^2} = \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

6. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность. Известно, что $AB = DA = 62$, $BC = CD = 93$, $AC = 125$. Найдите расстояние от центра окружности до точки A.

Ответ: 50.

Решение. Треугольники ABC и ADC равны по трём сторонам. Поэтому соответственно равны углы этих треугольников, прилежащие к стороне AC. Стало быть, AC — биссектриса углов при вершинах A и C четырёхугольника $ABCD$. Как известно, центр вписанной окружности многоугольника лежит на биссектрисах всех его углов. Значит, центр окружности — точка O — лежит на диагонали AC. Кроме того, O лежит на биссектрисе угла B. Для нахождения AO осталось воспользоваться теоремой о биссектрисе, применив её к треугольнику ABC: $AO/OC = AB/BC = 2/3$. Отсюда $AO = 50$.

7. Имеется клетчатое поле размером 4×6. У Игоря три краски — белая, серая и чёрная. Он должен раскрасить клетки так, чтобы соседние клетки были разного цвета, но при этом не было резкой смены цвета, т. е. запрещается соседство белой клетки и чёрной. (Клетки называются соседними, если у них есть общая сторона). Сколько способов у Игоря покрасить поле?

Ответ: 8192.

Решение. Если заменить (временно) белый и чёрный цвет зелёным, то у Игоря должна получится шахматная серо-зелёная раскраска. Таких раскрасок ровно две. Теперь осталось для каждой из 12 зелёных клеток выбрать один из двух цветов. Значит, общее число вариантов раскраски равно 2^{13}.

8. Найдите наименьшее целое a, при котором уравнение

$$(a+1)x^2 - 4ax + 4a - 4 = 0$$

имеет более одного целого корня.

Ответ: -5.

Решение. Ясно, что $a \neq -1$. При таком a уравнение имеет корни 2 и $\dfrac{2a-2}{a+1} = 2 - \dfrac{4}{a+1}$. Значит, число $a+1$ должно быть делителем 4.

2 блок

1. Петя и Вася бежали полумарафон. Петя пробежал его со средней скоростью 16 км/ч. Вася первую половину дистанции бежал со средней скоростью x км/ч, а на второй половине дистанции его средняя скорость упала на 20%. Петя и Вася финишировали одновременно. Найдите x.

Ответ: 18.

Решение. Пусть S — длина полумарафона. Тогда $\dfrac{2S}{16} = \dfrac{S}{x} + \dfrac{S}{0{,}8x}$, или $\dfrac{2S}{16} = \dfrac{1{,}8S}{0{,}8x}$. Отсюда $x = \dfrac{1{,}8 \cdot 16}{2 \cdot 0{,}8} = 18$.

2. Найдите 200-ю цифру после запятой в десятичной записи числа 1/7.

Ответ: 4.

Решение. Десятичная запись числа 1/7 имеет период длиной 6:

$$1/7 = 0{,}(142857).$$

Поскольку $200 = 6 \cdot 33 + 2$, 200-й цифрой будет 2-я цифра периода.

3. Пусть $\left\{\begin{array}{rcl} x(x+y+z) & = & 9; \\ y(x+y+z) & = & 27; \\ z(x+y+z) & = & 45. \end{array}\right.$ Каково наименьшее возможное значение xyz?

Ответ: -15.

Решение. После сложения уравнений получим $(x+y+z)^2 = 81$, откуда $x+y+z = \pm 9$. Поэтому система имеет два решения: $(1, 3, 5)$ и $(-1, -3, -5)$.

4. Найдите наименьший корень уравнения

$$\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2 - x - x^2} = \sqrt{x} - 1.$$

Ответ: 1.

Решение. ОДЗ уравнения состоит всего из двух точек: 0 и 1. Подстановка в искодное уравнение, показывает, что единственный корень уравнения $x = 1$.

5. Вычислите $\dfrac{1 - 2\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}^4 \frac{\pi}{12}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}}$.

Ответ: 12.

Решение. Вспомнив формулу тангенса двойного угла, получим

$$\frac{1 - 2\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}^4 \frac{\pi}{12}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}\right)^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}} = \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}\right)^2 = \left(2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}\right)^2 = 12.$$

6. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность. Известно, что $AB = DA = 18$, $BC = CD = 24$, $AC = 35$. Найдите расстояние от центра окружности до точки C.

Ответ: 20.

Решение. Треугольники ABC и ADC равны по трём сторонам. Поэтому соответственно равны углы этих треугольников, прилежащие к стороне AC. Стало быть, AC — биссектриса углов при вершинах A и C четырёхугольника $ABCD$. Как известно, центр вписанной окружности многоугольника лежит на биссектрисах всех его углов. Значит, центр окружности — точка O — лежит на диагонали AC. Кроме того, O лежит на биссектрисе угла B. Для нахождения AO осталось воспользоваться теоремой о биссектрисе, применив её к треугольнику ABC: $AO/OC = AB/BC = 3/4$. Отсюда $OC = 20$.

7. Имеется клетчатое поле размером 5×5. У Игоря три краски — белая, серая и чёрная. Он должен раскрасить клетки так, чтобы соседние клетки были разного цвета, но при этом не было резкой смены цвета, т. е. запрещается соседство белой клетки и чёрной. (Клетки называются соседними, если у них есть общая сторона). Сколько способов у Игоря покрасить поле?

Ответ: 12288.

Решение. Если заменить (временно) белый и чёрный цвет зелёным, то у Игоря должна получится шахматная серо-зелёная раскраска. Таких раскрасок ровно две. В одной из них 13 зелёных клеток, а в другой 12. Заменить зелёные клетки на чёрные и белые можно 2^{13} и 2^{12} способами соответственно. Значит, общее число вариантов раскраски равно $2^{13} + 2^{12}$.

8. Найдите наименьшее целое a, при котором уравнение

$$(a+2)x^2 - (a+7)x - 2a - 9 = 0$$

имеет более одного целого корня.

Ответ: -7.

Решение. Ясно, что $a \neq -2$. При таком a уравнение имеет корни -1 и $\dfrac{2a+9}{a+2} = 2 + \dfrac{5}{a+2}$. Значит, число $a+2$ должно быть делителем 5.