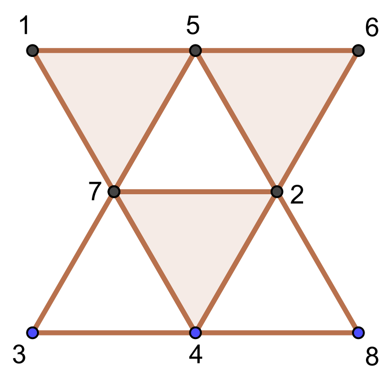
Муниципальный этап областной олимпиады школьников по математике
2019–2020 учебный год
Решения задач. Критерии оценивания

7 класс

1. Расставьте числа от 1 до 8 в вершинах фигуры, изображенной на рисунке, так, чтобы сумма трёх чисел в вершинах каждого серого треугольника равнялась 13, а в вершинах каждого белого треугольника равнялась 14.

Решение. Пример искомой расстановки чисел — на рис.



Оценивание. За верный пример 7 б.

2. В крупном шахматном интернет-турнире у каждого игрока было среди участников по два друга. Каждый провёл по одной партии со всеми участниками турнира, кроме двух друзей. Могло ли быть проведено ровно 2019 партий?

Ответ: нет.

Решение. Если в турнире участвовало n игроков, то общее количество партий в турнире $\dfrac{n(n-3)}{2}$. Действительно, каждый игрок проводит по $n-3$ партии. В произведении $n(n-3)$ каждая партия учитывается два раза, поэтому общее их количество вдвое меньше.

Нужно выяснить, может ли при каком-то натуральном n быть выполнено равенство $\dfrac{n(n-3)}{2} = 2019$, или $n(n-3) = 4038$.

1-й способ. Пусть такое число n нашлось. Заметим, что число 4038 делится на 3, но не делится на 9. Числа n и $n-3$ имеют одинаковый остаток от деления на 3, а их произведение кратно трём. Тогда каждое из них делится на 3, а их произведение на 9, чего нет. Противоречие!

2-й способ. С ростом числа игроков растёт и число партий. Если $n \leqslant 65$, то партий не больше 2015. А при $n \geqslant 66$ партий не меньше 2079. Значит, ровно 2019 партий быть не может.

3-й способ. Положительный корень уравнения $n(n-3) = 4038$ равен $\dfrac{3+\sqrt{16161}}{2}$. это число иррациональное из-за того, что $27^2 < 16161 < 28^2$.

Оценивание. За верное решение 7 б. Если (при 3-м способе решения) не обоснована иррациональность числа $\sqrt{16161}$, 4 б.

3. Известно, что n — нечётное натуральное число, а простое число p является общим делителем чисел $3n-2$ и $n+20$. Найдите все возможные значения p.

Ответ: 31.

Решение. Если числа $3n-2$ и $n+20$ делятся на p, то будет делится на p и число $62 = 3(n+20)-(3n-2)$, у которого два простых делителя: 2 и 31. Двойка не подходит, потому что в этом случае n должно быть чётным. А 31 подходит: например, при $n = 11$ исходные числа делятся на 31.

Оценивание. За полное верное решение 7 б. Если ответ угадан (написано: при $n = 11$ оба числа делятся на 31), но не доказано, что нет других решений, 2 б. Если показано, что p не может быть отличным от 31, но не приведён пример, показывающий, что p может быть равно 31, 5 б.

4. Несколько ящиков вместе весят 48 тонн, причём каждый из них весит не более одной тонны. Какое наименьшее количество пятитонных грузовиков заведомо достаточно, чтобы увезти этот груз?

Решение. Ясно, что в каждый грузовик можно поместить груз весом более 4 тонн (если загрузка не больше 4 тонн, то в пятитонный грузовик можно поместить ещё один ящик). Поэтому 12 грузовиков заведомо хватит для перевозки 48 тонн. А 11 грузовиков может не хватить. Например, если груз расположен в 56 ящиках, каждый из которых весит 6/7 тонны. Действительно, в один грузовик помещается не более пяти таких ящиков, а в 11 грузовиков — не более 55. Другой пример: 57 ящиков по 840 кг и один ящик 120 кг.

Оценивание. За верное решение 7 б. Если показано, что 12 грузовиков хватит, но не доказано, что одиннадцати может не хватить, 2 б. Если, наоборот, доказано, что одиннадцати может не хватить, но не показано, что 12 грузовиков хватит, 4 б.

5. В ряд лежит 10 монет — 8 настоящих и 2 фальшивые. Настоящие одного веса, фальшивые монеты (более лёгкие и тоже одного веса) лежат рядом. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах гарантированно можно обнаружить обе фальшивые монеты?

Ответ: 2.

Решение. Есть 9 вариантов возможного расположения двух фальшивых монет, а одно взвешивание имеет 3 исхода. Поэтому ясно, что одного взвешивания мало, чтобы гарантированно решить задачу. Покажем, как можно обойтись двумя взвешиваниями.

Пронумеруем по порядку монеты числами от 1 до 9. Первым взвешиванием сравниваем веса первых трёх монет и последних трёх. Если первые три монеты легче трёх последних, то фальшивые монеты среди первых четырёх. Если последние три монеты легче трёх первых, то фальшивые монеты среди последних четырёх. В случае равенства фальшивые монеты находятся среди монет с номерами от 4 до 7. В любом случае после первого взвешивания подозрительными (на фальшивость) остают четыре подряд идущие монеты. Вторым взвешиванием сравним первые две из них с двумя другими. В случае равенства фальшивыми будут две средние монеты, в противном случае фальшивые монеты — на более лёгкой чашке весов.

Оценивание. За верное решение 7 б. Если приведён верный алгоритм из двух взвешиваний, но не упомянуто, что одного взвешивания недостаточно, 6 б.

Замечание. При проверке алгоритмов, предлагаемых участниками олимпиады, нужно следить за тем, чтобы после любого исхода первого взвешивания оставалось ровно три варианта возможного расположения фальшивых монет. Если это будет не так, вторым взвешиванием гарантированно решить задачу не получится!