

## Решения задач для 8-го класса (всего 50 б.)

### Задача 1 (5 б.)

В комнату вошли 8 человек, и все они обменялись рукопожатиями. Сколько было рукопожатий?

**Решение:**

Каждый из 8-ми людей пожал руку 7-ми. Каждое из этих 56-ти рукопожатий посчитано два раза (человек  $A$  с  $B$  и наоборот,  $B$  с  $A$ ). Итого —  $56/2 = 28$  рукопожатий.

**Ответ:** 28 рукопожатий.

### Задача 2 (8 б.)

Сколько нулей стоит в конце числа, равного произведению натуральных чисел от 1 до 30?

**Решение:**

Числа 10, 20 и 30 дают три нуля в конце, произведения чисел 5, 15 с любым четным числом дают еще 2 нуля, наконец произведение 25 на любое число, кратное 4-м дает еще два нуля. Итого 7 нулей.

**Ответ:** 7 нулей.

### Задача 3 (7 б.)

На стороне  $AB$  равностороннего треугольника  $ABC$  отмечены точки  $K$  и  $L$  так, что  $AK = KL = LB$ , на стороне  $BC$  отмечены точки  $M$  и  $N$ , причем  $BM = MN = NC$ , а на стороне  $AC$  отмечены точки  $P$  и  $Q$ , для которых справедливо аналогичное соотношение  $CP = PQ = QA$ . Найдите отношение площади шестиугольника  $KLMNPQ$  к площади треугольника  $ABC$ .

**Решение:**

Каждый из маленьких треугольников, отрезаемых сторонами шестиугольника от треугольника  $ABC$  подобен исходному треугольнику с коэффициентом подобия 1:3. Следовательно его площадь в 9 раз меньше площади треугольника  $ABC$ . Тогда площадь шестиугольника равна  $S_{ABC} - 3 \cdot 1/9 S_{ABC} = 2/3 S_{ABC}$ . Искомое отношение  $2/3$ .

**Ответ:**  $2/3$ .

### Задача 4 (7 б.)

У двузначного числа цифра десятков в 2 раза больше цифры единиц. Делится ли это число на 3?

**Решение:**

Есть два подхода к решению.

1-ый: переберем просто все числа с указанным условием. Их всего четыре: 21, 42, 63 и 84. Каждое из них кратно трем.

2-ой: пусть двузначное число  $x$  имеет вид  $ab$ . То есть  $x = 10a + b$ . Так как  $a$  в два раза больше  $b$ , то  $x = 20b + b = 21b$ . Следовательно делится на 3.

**Ответ:** всегда делится.

### Задача 5 (8 б.)

Дима и Сережа поспорили, какое из двух выражений  $2012^{2012} + 2010^{2010}$  и  $2012^{2010} + 2010^{2012}$  больше. Действительно, а какая из этих двух сумм больше?

**Решение:**

Рассмотрим разность первого и второго числа:  $2012^{2012} + 2010^{2010} - 2012^{2010} - 2010^{2012}$ . Приводя подобные и вынося за скобку, получим:  $2012^{2010}(2012^2 - 1) - 2010^{2010}(2010^2 - 1)$ . Раскрывая по разности квадратов, получим:  $2011 \cdot 2013 \cdot 2012^{2010} - 2009 \cdot 2011 \cdot 2010^{2010}$ . Это число

очевидно положительно, следовательно первое рассматриваемое число больше второго.

**Ответ:** Первое больше второго.

### **Задача 6 (8 б.)**

В компьютерном классе 75 компьютеров, и как минимум один из них полностью рабочий. В каждой паре компьютеров хотя бы один имеет поломку. Сколько полностью рабочих компьютеров?

**Решение:**

Рассмотрим пары, образованные рабочим компьютером и произвольным другим. Раз в каждой паре есть поломка, то второй компьютер всегда сломан. Значит всего в классе один рабочий компьютер.

**Ответ:** 1.

### **Задача 7 (7 б.)**

Черепашка перемещается на экране компьютера, оставляя след в виде линии. Она понимает следующие команды:

**Вперед  $n$** , где  $n$  — целое число, перемещает черепашку на  $n$  шагов в направлении движения;

**Направо  $m$** , где  $m$  — целое число, поворачивает черепашку на  $m$  градусов по часовой стрелке.

Запись **Повтори  $k$  [Команда1 Команда2 ...]** означает повторение команд в скобках  $k$  раз. Напишите программу, с помощью которой черепашка нарисует правильный 72-угольник.

**Решение:**

В правильном 72-угольнике угол при вершине равен 175 градусам. Значит черепашка должна нарисовав ребро многоугольника, поворачивать в одну сторону на 5 градусов. Итоговая программа: **Повтори 72 [Вперед 1, Направо 5]**.

1. В месяце три воскресенья выпадают на четные числа. На какой день недели выпадает 5-е число месяца? (5 баллов)

Ответ: Среда

Решение: Если три воскресенья выпадают на четные числа, то в месяце пять воскресений, то есть как минимум 29 дней. Так как максимальное число дней в месяце – 31, то в этом месяце первое воскресенье было либо 1-го, либо 2-го, либо 3-го числа. Четным является только 2-е число. Тогда 5-го числа была среда.

Баллы: ответ без решения – 0 баллов
2. Некто забрел в сад, в котором три калитки и решил пройти через них, не пропустив ни одной. У каждой калитки стоит человек. Набрал некоторое число яблок, человеку, стоявшему у первой калитки, он отдал половину имевшихся яблок и ещё пол-яблока. Человек у второй калитки он отдал половину оставшихся яблок и ещё пол-яблока. И половину от оставшихся и пол-яблока он отдал человеку у третьей калитки. При этом он не разрезал ни одного яблока. Какое минимальное число яблок для этого понадобится? (7 баллов)

Ответ: 7 яблок.

Решение: Пусть изначально было  $x$  яблок. После первой калитки осталось  $(0,5x - 0,5)$  яблок, после второй калитки  $(0,5(0,5x - 0,5) - 0,5)$  яблок, и третьей, соответственно,  $(0,5(0,5(0,5x - 0,5) - 0,5) - 0,5)$  яблок. Так как мы ищем минимальное достаточное число яблок, то предположим, что были отданы все яблоки, тогда получаем уравнение

$$0,5(0,5(0,5(0,5x - 0,5) - 0,5) - 0,5) - 0,5 = 0$$

Баллы: ответ без решения – 0 баллов  
допущена ошибка в решении уравнения – 3 балла  
ответ найден подбором – 5 баллов
3. В семье пять голов и четырнадцать ног. Сколько из них людей, а сколько – собак? (5 баллов)

Ответ: 2 собаки и 3 человека

Баллы: ответ без решения – 0 баллов
4. Придумайте число, которое оканчивается на 17, делится на 17 и имеет сумму цифр, равную 17? (10 баллов)

Ответ: 15317

Решение: число оканчивается на 17, следовательно, сумма последних цифр = 8, сумма оставшихся цифр = 9. Осталось найти число, которое делится на 17 и сумма цифр = 9. Оно быстро находится перебором:

$$17 * 1 = 17$$

$$17 * 2 = 34 \dots 17 * 9 = 153$$

Ответом могут быть так же числа 1530017...153 00000017 и так далее.

Баллы: ответ без решения – 1 балл  
ответ простым перебором – 5 баллов
5. Докажите, что разность  $77^{77} - 43^{43}$  делится на 10 без остатка (10 баллов)

Решение: при возведении в степень числа 77 получаются числа, оканчивающиеся на 7, 9, 3, 1. То есть  $77^1$  оканчивается на 7,  $77^2$  - на 9 и так далее.  $77^{77}$  пробежит этот цикл  $77/4 = 14 + 1/4$  то есть 14 раз полный цикл и ещё одно число. То есть  $77^{77}$  оканчивается на 7. Аналогично 43 пробегает цикл 3, 9, 7, 1, причем  $43/4 = 10 + 3/4$ , то

есть 10 полных цикла и ещё три цифры, остановится на цифре 7. У чисел  $77^{77}$  и  $43^{43}$  одинаковые последние цифры, поэтому их разность делится на 10.

6. Следующие три высказывания истинны:

(1) В море вышел корабль В или С, но не оба вместе;

(2) В море вышел корабль А или С, но не оба вместе;

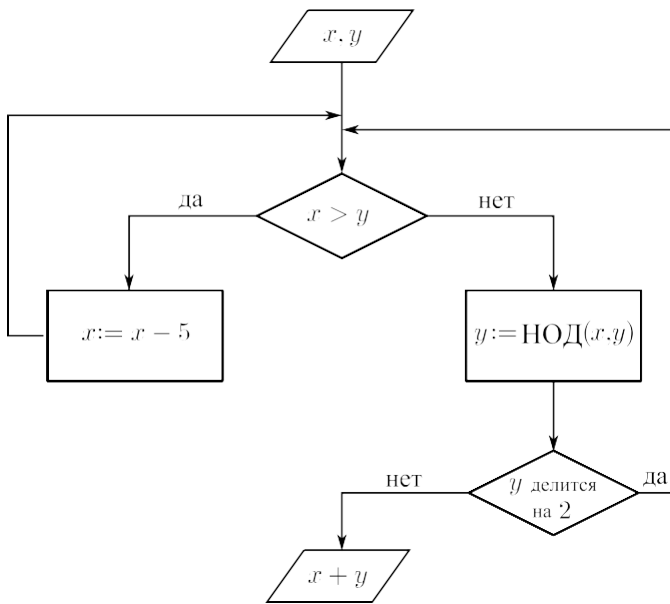
(3) В море вышел хотя бы один из кораблей А и В. Какие корабли вышли в море?

Ответ: в море вышли корабли А и В.

Решение: Третье условие говорит, что корабль А или В вышел в море. Тогда из первого и второго условий следует, что корабль С в море не вышел. Но тогда из этих же двух условий следует, что корабль А и В вышли в море. Это не противоречит третьему высказыванию.

7. Кощей Бессмертный спрятал самые ценные свои сокровища в сундук с кодовым замком. Захотел он полюбоваться своими драгоценностями, а из трех чисел кода помнит только первые два - 16 и 8. Кощей помнит, что третье число  $z$  можно найти по схеме (см. ниже). Помогите Кощей открыть сундук ( $x$  - первое число,  $y$  - второе)(10 баллов)

Ответ:  $z=2$ .



$\text{НОД}(x, y)$  — наибольший общий делитель чисел  $x$  и  $y$ . Например,  
 $\text{НОД}(12, 8) = 4$