Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2021-2022 учебный год

Решения задач и критерии оценивания. 11 класс

$\boxed{\textbf{11.1}}$ *В таблицу 3×3 расставили числа от 1 до 9 (каждое по одному разу), а потом посчитали 6 произведений чисел в строках и столбцах. Могло ли оказаться, что три из них совпадают?*

Решение: да, могло, например, так:

5	7	2
6	3	4
1	8	9

Критерии:

- Приведён правильный пример и показано, какие произведения равны, — 7 баллов;
- Пример правильный, но не показано, какие из произведений равны, — 6 баллов;
- Попытки объяснения, каким образом был получен пример, не должны влиять на итоговую оценку, если правильный пример предъявлен.

$\boxed{\textbf{11.2}}$ Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+20}+\sqrt{x+21}}+\frac{1}{\sqrt{x+21}+\sqrt{x+22}}=1.$$

Решение 1: Домножив обе дроби на сопряжённые, получим $\sqrt{x+22}-\sqrt{x+20}=1$. Домножив это на сопряжённое и преобразовав, получим $\sqrt{x+22}+\sqrt{x+20}=2$. Сложим два равенства, получим $\sqrt{x+22}=\frac{3}{2}, x=-\frac{79}{4}$. Подставляя это число в исходное уравнение, проверяем, что всё сошлось.

Решение 2: Левая часть монотонно убывает, поэтому у уравнения не более одного корня, а подстановкой убеждаемся, что $x=-\frac{79}{4}$ подходит.

Критерии: Неравносильные преобразования без обоснования или последующей проверки — снимается 2 балла.

$\boxed{\textbf{11.3}}$ *Докажите, что $1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 5!\cdot\ldots\cdot 2021!\cdot 2022!$ не является степенью натурального числа выше первой. (Напоминание: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$)*

Решение: Число является k-ой степенью тогда и только тогда, когда каждый простой множитель входит в его разложение в кратной k степени. Заметим, что 1009 и 1013 – простые числа. Множитель 1009 встречается по одному разу в каждом из $1009!, 1010!, \ldots, 2017!$, а также по 2 раза от 2018! до 2022!. Итого, степень вхождения $1009+5\cdot 2=1019$. Множитель 1013 встречается по разу в числах от 1013! до 2022!. Итого, его степень вхождения 1010. Но числа 1010 и 1019 не имеют общего делителя >1.

Критерии:

- Доказано, что число – не полный квадрат, или найден простой делитель в нечётной степени — 2 балла;
- Вместо 1009 и 1013 могут быть использованы другие простые числа с правильным подсчётом степени вхождения — баллы не снимать;
- Не доказано, что 1009 (или его аналог, больший 100) – это простое число, — снимать 1 балл.

$\boxed{\textbf{11.4}}$ *Обозначим $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$. Докажите, что при всех положительных x верно неравенство*

$$P_{20}(x) \cdot P_{21}(x^2) \leqslant P_{20}(x^2) \cdot P_{22}(x).$$

Решение: При $x = 1$ неравенство верно. Пусть $x \neq 1$, тогда $P_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$. Тогда наше неравенство равносильно

$$\frac{x^{21} - 1}{x - 1} \cdot \frac{x^{44} - 1}{x^2 - 1} \leqslant \frac{x^{42} - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^{23} - 1}{x - 1}.$$

Знаменатель произведения положителен, поэтому избавляясь от него, раскрывая скобки и приводя подобные получаем равносильное неравенство

$$-x^{21} - x^{44} \leqslant -x^{23} - x^{42},$$

которое преобразуется к виду $(x^{42} - x^{21})(x^2 - 1) \geqslant 0$, что является верным неравенством для положительных x (например, по методу интервалов или выделяя полный квадрат).

Критерии:

- Неравенство делится или умножается на выражения типа $x - 1$ и отдельно не проверяется, что при $x = 1$ неравенство выполняется — снимать 1 балл;
- Используется формула $P_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ без отсылки к формуле сокращённого умножения или сумме геомпрогрессии — баллы не снимать;
- Не принимать на веру, что после открытия всех скобок и приведения подобных членов в исходном неравенстве, останутся только положительные слагаемые в правой части;
- Равносильность переходов должна быть пояснена.

$\boxed{\textbf{11.5}}$ *В $\triangle ABC$ провели биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке O. Оказалось, что площади $\triangle OB_1A$ и $\triangle OA_1C$ равны, а также равны площади $\triangle OB_1C$ и $\triangle OC_1A$. Верно ли, что $\triangle ABC$ равносторонний?*

Решение: Обозначим длины сторон треугольника $AB = c, BC = a, CA = b$. У треугольников из условия равны высоты из вершины O (т.к. O – центр вписанной окружности), поэтому из равенства площадей следует равенство оснований $AB_1 = A_1C, AC_1 = B_1C$. Используя факт, что биссектриса делит сторону в отношении прилегающих сторон, это означает $\dfrac{bc}{a+c} = \dfrac{ab}{b+c}, \dfrac{bc}{a+b} = \dfrac{ab}{a+c}$. Сокращая на b и используя свойство пропорций: $c(b+c) = a(a+c)$ и $a(a+b) = c(a+c)$. Вычтем эти два равенства: $b(c-a) + c^2 - a^2 = a^2 - c^2$, откуда

$$b(c - a) = 2(a - c)(a + c).$$

Если $a \neq c$, то получатся разные знаки у правой и левой части. Значит, $a = c$, откуда, используя $c(b + c) = a(a + c)$ получаем, что и b с ними совпадает.

Критерии:

- Замечено, что $AB_1 = A_1C, AC_1 = B_1C$ — 1 балл;
- Выведены формулы для длин отрезков, на которые биссектриса разбивает сторону, — 1 балл;
- Если эти формулы отрезков выписаны правильно, но без вывода, — 1 балл.