Муниципальный этап олимпиады школьников по математике

2018–2019 учебный год

Решения задач. Критерии оценивания

9 класс

1. *Палиндром* — натуральное число, которое одинаково читается слева направо и справа налево (например, числа 7, 77, 727, 7227 — палиндромы). Найдите наименьший палиндром, который при делении на 3, 4, 5 даёт соответственно остатки 2, 3 и 0.

Ответ: 515.

Решение. Из условия следует, что искомый палиндром делится на 5. Но последняя его цифра не может быть нулём (иначе и первая цифра былы бы нулём). Значит, последняя цифра 5. Будем теперь перебирать по возрастанию все такие палиндромы до тех пор, пока не обнаружим число, дающее нужные остатки при делении на 3 и 4:

$$5, 55, 505, 515, \ldots$$

Первое подходящее число 515.

Оценивание. За верное решение 7 баллов. Если есть только ответ (без доказательства, что это минимальный палиндром), 1 балл.

2. Петя расставил по кругу в каком-то порядке числа от 1 до 9. Вася выписал суммы соседних чисел. Могло ли у него получиться подряд 9 последовательных чисел?

Ответ: могло.

Решение. Если по кругу выписать числа 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9, 5, то попарные суммы будут равны 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.

Замечание. Этот пример единственный (с точностью до выбора порядка обхода). Несложно найти, что наименьшая сумма равна 6.

Оценивание. За верное решение 7 баллов.

3. Петя записал несколько алгебраических выражений, каждое из них возвёл в квадрат и сложил результаты. Могло ли у него появиться выражение $x^2 + y^2 + z^2 + xz + 4x + 4y + 2$?

Ответ: нет.

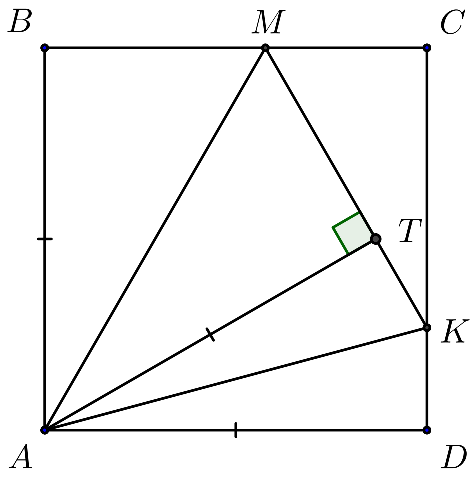
Решение. Пусть $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xz + 4x + 4y + 2$. Из условия следует, что при любых значениях переменных $f(x, y, z) \geqslant 0$. Однако, например, $f(-1, 0, 0) = -1 < 0$.

Оценивание. За верное решение 7 баллов.

4. $ABCD$ — квадрат. На сторонах BC и CD выбраны соответственно точки M и K такие, что $\angle BAM = \angle MKC = 30^\circ$. Найдите $\angle AKD$.

Ответ: 75°.

Решение. Пусть T — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на отрезок MK.



Поскольку $\angle AMB = \angle CMK = 60°$, имеем

$$AMT = 180° - \angle AMB - \angle KMC = 60°; \quad \angle TAM = 30°.$$

Следовательно, треугольники ABM и ATM равны (по стороне AM и прилежащим к ней углам). Поэтому $AT = AB = AD$. Значит, равны и треугольники ATK и ADK (по гипотенузе и катету). Отсюда $\angle AKD = \frac{1}{2}\angle MKD = 75°$.

Оценивание. За верное решение 7 баллов.

5. На конгресс приехали учёные. Известно, что среди любых четырёх участников конгресса есть такой, который знаком с тремя другими (считаем, что если A знаком с B, то и B знаком с A). Докажите, что найдётся участник, знакомый со всеми остальными участниками конгресса.

Доказательство. Пусть A — участник конгресса, у которого максимальное число знакомых. Предположим, что он знаком не со всеми, например, не знаком с B. Возьмём двух любых участников C и D, отличных от A и B. Если C и D не знакомы, то в четвёрке $\{A, B, C, D\}$ нет человека, знакомого с тремя остальными. Значит, C и D знакомы друг с другом, а кто-то из них, скажем, C знаком и с A, и с B.

Теперь в данной четвёрке заменим D на любого человека E, знакомого с A. В четвёрке $\{A, B, C, E\}$ люди A и B не знакомы, в силу чего C и E должны быть знакомы.

Итак, C знаком со всеми знакомыми A, а, сверх того, C знаком ещё и с B, с которым A не знаком. Стало быть, у C больше знакомых, чем у A. Получили противоречие с тем, что у A наибольшее число знакомых. К противоречию нас привело предположение о том, что A знаком не со всеми. Следовательно, A знаком со всеми остальными участниками конгресса.

Оценивание. За верное решение 7 баллов.