Блок 1.

5-6 класс.

Задача 1. В классе 30 учеников. 15 из них занимаются дополнительно в спортивных секциях, 12 посещают музыкальный кружок, 6 ничем не занимаются дополнительно. Сколько учеников посещают и музыкальный кружок, и спортивную секцию?

Ответ: 3

Решение: из 30 учеников ничем занимаются дополнительно хотя бы чем-то 30-6=24 ученика. Из них не занимаются в музыкальном кружке только 24-12=12. То есть из занимающихся в спортивных секциях 15-12=3 занимаются ещё и в музыкальном кружке. Ответ: 3.

Задача 2. За один забег спортсмен пробегает 4 круга. Пробежав 2 круга, спортсмен увеличил свою скорость в 2 раза и закончил забег на четверть часа быстрее, чем если бы он не увеличивал скорость. Сколько минут бежал спортсмен?

Ответ: 45

Решение: 2 круга – это половина пути. Пробежав 2 круга, спортсмен увеличил скорость в 2 раза, то есть на оставшуюся половину пути он потратил в 2 раза меньше времени, чем планировал. А, значит, он планировал потратить 15*2=30 минут на 2 круга. То есть по 15 минут на круг. Итого он бежал 2*15+15=45 (минут). Ответ: 45

Задача 3. На доске выписаны все четырехзначные числа, каждая из цифр у которых либо равна обеим соседним, либо отличается от них на 1 – от одного в большую сторону, а от другого в меньшую. Сколько таких чисел содержит в своей записи четверку?

Ответ: 9

Решение: выпишем эти числа. 4444, 4321, 5432, 6543, 7654, 1234, 2345, 3456, 4567.

Задача 4. 2-головые и 7-головые драконы собрались на митинг. В самом начале митинга Король Драконов – 7-головый Дракон пересчитал всех собравшихся по головам. Он огляделся вокруг своей, украшенной короной средней головы и увидел 25 голов. Король остался доволен результатами подсчетов и поблагодарил всех присутствующих за их явку на митинг. Сколько всего драконов пришло на митинг?

Ответ: 8

Решение: средняя голова Короля себя не видит, поэтому на митинг пришло, фактически, 26 голов. Из низ 7 – головы Короля. Остальных – 26-7=19 голов. Так как 19 – нечетное число, то среди оставшихся драконов есть по крайней мере один 7-головый. Остается 19-7=12 голов. И оставшиеся головы принадлежат 2-х головым, так как 12-7=5 не делится на 2 и недостаточно на ещё одного 7-голового. Итого 2 - 7-головых и 6 - 2-головых. Всего 8 драконов.

Задача 5. Сколько девочек имеют пятёрок больше, чем прогулов?

Номер	Имя	Пятёрок	Прогулов	Лет
1	Аня	10	0	12
2	Вася	5	1	14
3	Инна	1	2	13
4	Настя	7	3	14
5	Петя	2	5	13

Ответ: 2

Решение.

В списке всего 3 девочки, из них число пятерок больше чем число прогулов у Ани и Насти.

7-8 класс

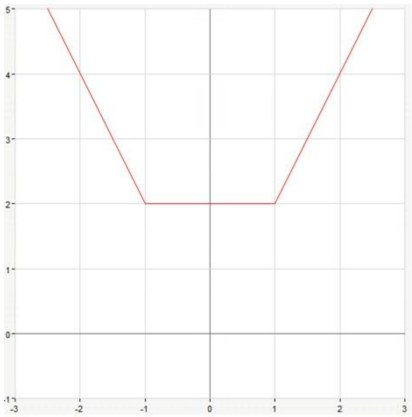
Задача 1. Какой цифрой оканчивается число $9^{9^{9^9}}$?

Ответ: 9

Решение: заметим, что чётная степень числа 9 оканчивается на 1-цу, а нечётная на 9-ку. Следовательно, так как 999 — нечётно (любая степень числа 9 нечётна), то $9^{9^{9^9}}$ оканчивается на 9

Задача 2. Найти сумму значений параметра ***a***, при которых уравнение
|*x+1*|+|*x-1*|=*a* имеет бесконечно много решений.

Ответ: 2



Решение: график функции y = |x-1| + |x+1| изображён на рисунке

Уравнение |x-1| + |x+1| = a имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда число точек пересечений этого графика с графиком прямой y = a бесконечно. Так как графиком прямой y = a является горизонтальная линия, проходящая через точку (0, a), то бесконечное число точек пересечений возможно только при a = 2.

Задача 3. Радиус окружности, вписанной в треугольник ***ABC***, равен ***2***, и эта окружность касается стороны ***BC*** в точке ***P***. Радиус окружности, касающейся стороны ***BC*** и продолжений сторон ***AB*** и ***AC***, равен ***4***, и эта окружность касается стороны ***BC*** в точке ***Q***. Точка ***P*** лежит на отрезке ***BQ***. Найти градусную меру угла ***ABC***, если ***PQ = 2***.

Ответ: 90

Решение: Обозначим O1 — центр вписанной окружности, O2 — центр вневписанной окружности и H — точка касания этой вневписанной окружности с продолжением стороны AB. Пусть ∠O1BC = α. Тогда, так как O1B — биссектриса ∠ABC, то ∠HBC = 180^0−2α. Далее, так как BO2 — биссектриса этого угла HBC, то ∠O2BC = 90^0−α. А следовательно, так как треугольник BO2Q прямоугольный, то ∠BO2Q = α.

Задача 4. Дана последовательность из 11 чисел, $x_1, x_2, \dots, x_{11}$. В ней каждое число x_i равно либо 0, либо 1. Из этой последовательности получили последовательность из 10 чисел $y_1, y_2, \dots, y_{10}$ по формулам: $y_1 = x_1 \cdot x_2$, $y_2 = x_2 \cdot x_3, \dots,$ $y_{10} = x_{10} \cdot x_{11}$. Определите, какие из четырѐх приведѐнных ниже последовательностей не могло быть получено указанным способом. Укажите номер последовательности (1): 1100111011; (2): 1110000010; (3):0011001001; (4):0111000111

Ответ: 1

Решение: Рассмотрим последовательность (1) x1*x2=1, сл-но, x1=1, x2=1; x2*x3=1, сл-но, x3=1, сл-но, x4=0, x5=1, x6=1=x7=x8, x8*x9=0, сл-но, x9=1. Но x9*x10=1, то есть x9=1. Противоречие. Аналогично устанавливается возможность для последовательностей 2, 3 и 4. Несложно заметить, что по заданному принципу может быть создана любая последовательность (при различных исходный последовательностях x), в которой единственный ноль не стоит в окружении единиц.

Задача 5. Сколько записей удовлетворяют условию: **Пятёрок <8 И (Прогулов> 2 ИЛИ Лет <= 13)?**

Номер	Имя	Пятёрок	Прогулов	Лет
1	Вася	5	1	14
2	Петя	2	5	13
3	Аня	10	0	12
4	Инна	3	2	13
5	Настя	7	3	14

Ответ: 3

Решение.

Запись номер 1 не подходит, так как (прогулов <2 и лет >13)
Запись номер 2 подходит
Запись номер 3 не подходит, так как пятерок> =8
Запись номер 4 подходит
Запись номер 5 подходит

9 класс.

Задача 1. Найдите сумму цифр квадрата числа 999…9 (сто девяток).

Ответ: 900

Решение: воспользуемся формулой разности квадратов.

(10…0(сто нулей) -1)^2=10…0(200 нулей) – 20…0 (100 нулей) + 1 = 9…980...01(99 девяток и 99 нулей)

В полученном числе сумма цифр, очевидно, 900.

Задача 2. В комнате оказалось 300 вёдер воды. Воду стали откачивать двумя насосами. Один насос выкачивает 48 вёдер за 2 часа, а другой – 129 вёдер за 6 часов. Через сколько часов выкачают всю воду, если ежечасно с потолка поступает 8 вёдер воды?

Ответ: 8

Решение: 1-й насос откачивает 48/2=24 ведра воды в час, второй насос откачивает 129/6=21,5 ведра воды в час. Вместе они выкачивают 24+21,5=45,5 ведер воды в час. Но за час прибывает ещё 8 ведер воды, то есть убывает из бассейна 45,5-8=37,5 ведер воды в час. Бассейн опустеет через 300/37,5=8 часов.

Задача 3.Сколько имеется семизначных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

Ответ: 120

Решение: (один из способов решения). Рассмотрим 2-значные числа, с убывающими цифрами. После девятки могут стоять 9 цифр (012345678), после 8 – восемь (01234567) и так далее.

9-9, 8-8, 7-7, 6-6, 5-5, 4-4, 3-3, 2-2, 1-1

Рассмотрим трехзначные числа. После первой 9 могут далее идти цифры двузначного числа, начинающегося с 8, их всего (8+1)*8/2=36 и так далее.

9-36, 8-28, 7-21, 6-15, 5-10, 4-6, 3-3, 2-1

Для четырехзначных чисел, соответственно, после 9 может быть 28+21+15+10+6+3+1=84 числа

9-84, 8-56, 7-35, 6-20, 5-10, 4-4, 3-1

Для пятизначных 9-126, 8-70, 7-35, 6-15, 5-5, 4-1

Для шестизначных 9-126, 8-56, 7-21, 6-6, 5-1

Для семизначных 9-84, 8-28, 7-7, 6-1, всего их 84+28+7+1=120

Задача 4. Четыре фразы на русском языке записываются без знаков препинания и пробелов. Для зашифрования каждой фразы используются неизвестные последовательности цифр $x1$, $x2$, …. Буквы во фразе последовательно заменяются на пары цифр согласно в порядке следования их в алфавите (к одноразрядным числам слева дописывается **0**: например, **А** будет заменяться на **01**). Зашифрование состоит в преобразовании получившейся цепочки цифр по следующему правилу. К первой цифре цепочки прибавляем цифру $x1$ и записываем последнюю цифру суммы, потом ко второй цифре цепочки прибавляем $x2$ и также записываем последнюю цифру суммы и т.д. Результат зашифрования выглядит следующим образом:

1) 04363896371101562896140627780226689152728741068977137802З6
2) 903913973306253415922423357601144271609271
3) 17915094077497245567822036742365175971
4) 3703532519925327917085909750657981901587194945023834835000452922

Известно, что две фразы зашифрованы с помощью одной и той же последовательности. Укажите номера последовательностей слитно.

Ответ: 12

Решение: каждая буква алфавита будет записана двумя цифрами, причем первая цифра может быть 0, 1, 2 или 3. То есть в цифровой записи исходной фразы на нечетных местах стоят только цифры 0, 1, 2 или 3. Далее рассмотрим последние цифры чисел, получаемых при прибавлении к числам 0, 1, 2 и 3 чисел 0, 1, …, 9.

0+0=0, 0+1=1, 0+2=2, 0+3=3, 0+4=4, …, 0+9=9

1+0=1, 1+1=2, …, 1+9=0

2+0=2, 2+1=3, …, 2+8=0, 2+9=1

3+0=3, 3+1=4, …, 3+7=0, 3+8=1, 3+9=2

Рассмотрим (i) элементы последовательностей. И будем выписывать подходящие цифры для шифрующей числовой последовательности, из которой можно получить этот элемент.

(1) 1) 0, 9, 8, 7; 2) 9, 8, 7, 6; 3) 1, 0, 9, 8; 4) 3, 2, 1, 0 – в каждой из пар есть что-то общее
(3) 1) 3, 2, 1, 0; 2) 3, 2, 1, 0; 3) 9, 8, 7, 6; 4) 0, 9, 8, 7– последовательности разбились на пары 12 и 34.
(5) 1) 3, 2, 1, 0; 2) 1, 0, 9, 8; 3) 5, 4, 3, 2; 4) 5, 4, 3, 2
(7) 1) 9, 8, 7, 6; 2) 9, 8, 7, 6; 3) 9, 8, 7, 6; 4) 2, 1, 0, 9
(9) 1) 3, 2, 1, 0; 2) 3, 2, 1, 0; 3) 0, 9, 8, 7; 4) 1, 0, 9, 8
(11) 1) 1, 0, 9, 8; 2) 0, 9, 8, 7; 3) 7, 6, 5, 4 4) 0, 1, 2, 3 – последовательности 34 не имеют общей шифрующей цифры, таким образом, остается пара 12.

Задача 5. В лифте дома две кнопки (**+1)** и (***2)**. При нажатии на первую (**+1)**, лифт поднимается на один этаж. При нажатии на вторую (***2)** лифт поднимается на этаж, номер которого равен текущему этажу умножить на 2. Сколько минимум надо нажатий на кнопки, чтобы подняться на 17 этаж если лифт находится на первом.

Ответ: 5

Решение: первое нажатие на любую кнопку приведет на этаж 2, а на 17 этаж можно попасть только с 16-го нажатием кнопки (+1). То есть как минимум 2 нажатия. Остался вопрос за сколько нажатий минимум можно попасть с 2 этажа на 16-й. Очевидно, что за 3 нажатия кнопки (*2) мы это сделаем. Покажем, что этот путь в 3 нажатия - кратчайший – рассмотрим пути со 2 этажа за 2 нажатия:

2 – (*2) – 4 – (+1) – 5 – не попали на 16-й
2 – (+1) – 3 – (*2) – 6 – не попали на 16-й
2 – (+1) – 3 – (+1) – 4 – не попали на 16-й

Итого кратчайший путь составляет 5 нажатий.

10 класс.

Задача 1 Найдите сумму цифр квадрата числа 333...3 (сто троек).

Ответ: 900

Решение: аналогично задаче 1 из 9 класса 1-го блока находим, что $99\ldots9^2=9\ldots980\ldots01$. Так как 3=9/3, то $3\ldots3^2= 9\ldots980\ldots01/9=1\ldots108\ldots89$ (99 единиц, 99 восьмерок и девятка), всего 99+99*8+9=900

Задача 2. Шерлок Холмс и доктор Ватсон, работая вместе, могут вырыть канаву за 6 часов. Если бы Холмс рыл канаву 4 часа, а затем Ватсон – 6 часов, то канава была бы вырыта на 80%. За сколько часов вырыл бы эту канаву Холмс, работая в одиночку?

Ответ: 10

Решение: пусть Холмс роет x% от канавы в час, а Ватсон – y%. Тогда за 4 часа Холмса и 6 часов Ватсона они вырыли (4x+6y) %, а вместе за 1 час они роют (x+y) %. Получаем систему уравнений (вся канава – это 100%):

$\begin{cases} 6x+6y=100 \\ 4x+6y=80 \end{cases}$ x=10%. То есть 100% канавы Холмс выроет за 10 часов.

Задача 3. На какое наибольшее количество частей делят 6 прямых плоскость?

Ответ: 22

Задача 4. Женя решила поделиться забавным палиндромом с Ксюшей. Но, чтобы никто о нем больше не узнал, Женя удалила пробелы между словами, перемешала буквы и получила вот что: **тдиенгоортониеровгд**. Помогите Ксюше прочитать палиндром (палиндром – текст, читающийся одинаково в обоих направлениях. Например: «А роза упала на лапу Азора»).

Ответ: 6

Задача 5. В лифте дома две кнопки (**+1**) и (***2**). При нажатии на первую (**+1**), лифт поднимается на один этаж. При нажатии на вторую (***2**) лифт поднимается на этаж, номер которого равен текущему этажу умножить на 2. Сколько минимум надо нажатий на кнопки, чтобы подняться на 17 этаж если лифт находится на первом.

Ответ: 5

Решение: первое нажатие на любую кнопку приведет на этаж 2, а на 17 этаж можно попасть только с 16-го нажатием кнопки (+1). То есть как минимум 2 нажатия. Остался вопрос за сколько нажатий минимум можно попасть с 2 этажа на 16-й. Очевидно, что за 3 нажатия кнопки (*2) мы это сделаем. Покажем, что этот путь в 3 нажатия - кратчайший – рассмотрим пути со 2 этажа за 2 нажатия:

2 – (*2) – 4 – (+1) – 5 – не попали на 16-й
2 – (+1) – 3 – (*2) – 6 – не попали на 16-й
2 – (+1) – 3 – (+1) – 4 – не попали на 16-й

Итого кратчайший путь составляет 5 нажатий.

11 класс

Задача 1. Найдите сумму цифр квадрата числа 666... 6 (сто шестёрок).

Ответ: 900

Решение: аналогично задаче 1 из 10 класса 1-го блока находим, что $99\ldots9^2$=9…980…01. Так как 3=9*2/3, то $3\ldots3^2$ = 9…980…01*4/9 = =1…108…89*4 = 4…435…56 (99 четверок, 99 пятерок, тройка и 6-ка), всего 99*4+99*5+3+6=900

Задача 2. Катер и теплоход двигались с постоянными скоростями по перпендикулярным прямым, пересекающимся в точке А. Когда катер находился в точке А, расстояние между катером и теплоходом было равно 300 метров. Когда теплоход оказался в точке А, катер удалился от этой точки на 400 метров. Каким было наименьшее расстояние между катером и теплоходом?

Ответ: 240

Решение: теплоход движется по направлению к точке А, катер – от точки А. Так как про время, за которое суда прошли 300 и 400 метров соответственно ничего не сказано, то можем считать, что они шли 1 час, то есть их скорость 300 м/час и 400м/час. За время t теплоход тогда преодолеет расстояние 300t, катер – 400t. Расстояние между судами вычислим по теореме Пифагора, так как линии движения судов расположены перпендикулярно:

$S(t) = \sqrt{(300t)^2 + (400 - 400t)^2}$. Наша задача – найти точку минимума функции S(t).

$$S'(t) = \frac{90000t - 400(400 - 400t)}{\sqrt{(300t)^2 + (400 - 400t)^2}} = 0$$

Откуда $250000t = 160000$ и $t = 0.64$ часа. Нетрудно установить, что t=0,64 является точкой минимума функции S(t).

$S(0{,}64) = \sqrt{(300 * 0{,}64)^2 + (400 - 400 * 0{,}64)^2} = 240$ (метров).

Задача 3. Шар разрезали 5 плоскостями на части. Какое наибольшее количество частей могло получиться?

Ответ: 26

Задача 4. Линия связи состоит из 4-х каналов, пронумерованных числами 1,2,3,4. Для передачи по линии сигнала на каждый канал подается свой импульс, величина которого может быть 8, 10 или 12 единиц. В каждом канале есть усилитель, который увеличивает поданный импульс в 3^{i-1} раз, где i - номер канала. На выходе линии формируется сигнал, который равен остатку от деления на 81 суммы полученных по каналам импульсов. Какие импульсы необходимо подать на каналы, чтобы получить сигнал величиной 7 единиц? Ответ напишите подряд в порядке следования подаваемых импульсов.

Ответ: 1081210

Решение: рассмотрим преобразования импульсов на всех каналах.

№ канала	Импульс 8	Импульс 10	Импульс 12
1	8	10	12
2	24	30	36
3	72	90	108
4	216	270	324

На выходе мы должны получить сигнал 7 как остаток от деления некоторого числа на 81. То есть выходная сумма имеет вид 81k+7 и заключена в диапазоне от 8+24+72+216=320 до 12+36+108+324=480. Такое число всего одно – 412.

Подберем нужную комбинацию импульсов. 216+108+36+12=372<412, поэтому 4-й импульс точно не 216.
324+72+24+8>412, сл-но, последний импульс не 324. То есть остается 270.
412-270=142, сумма импульсов по 1, 2 и 3 каналам равна 142.
Проверим опять сначала крайние значения.
108+24+8=140, а вот 108+24+10=142
Исконная последовательность 10-8-12-10

Задача 5. Сколько из этих десяти высказываний верно?

1. Число неверных высказываний – 1
2. Число неверных высказываний – 2
3. Число неверных высказываний – 3
4. Число неверных высказываний – 4
5. Число неверных высказываний – 5
6. Число неверных высказываний – 6
7. Число неверных высказываний – 7
8. Число неверных высказываний – 8
9. Число неверных высказываний – 9
10. Число неверных высказываний - 10

Ответ: 1

Решение: верное высказывание – девятое, то есть верным является только 1 высказывание, так как любая пара высказываний является взаимоисключающей. То есть не может быть более одного верного высказывания.