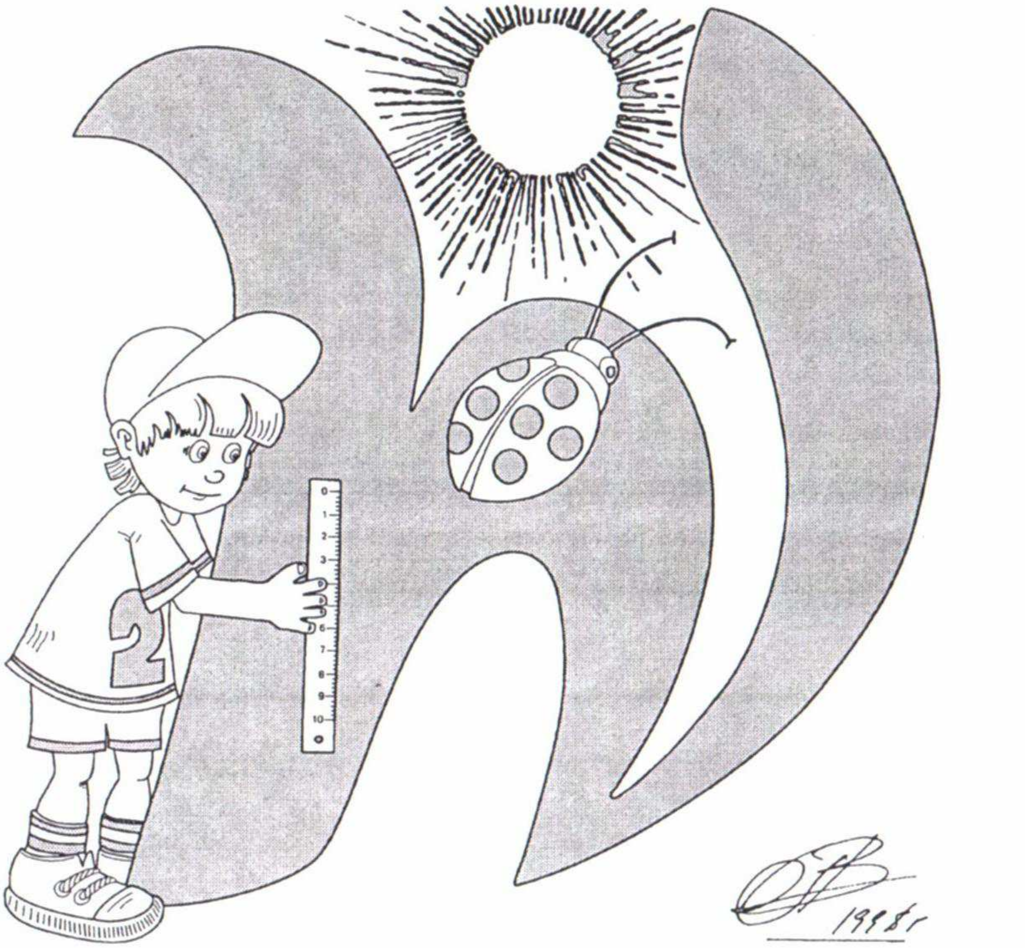
Методическая комиссия по физике
при центральном оргкомитете
Всероссийских олимпиад школьников

XLVI Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Теоретический тур

Методическое пособие



Саранск, 2012 г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
при центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников
Телефоны: (495) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **physolymp@gmail.com**

Авторы задач

9 класс	10 класс	11 класс
1. Замятнин М.	1. Аполонский А.	1. Атауллин В.
2. Кармазин С.	2. Воробьёв И.	2. Аполонский А.
3. Кобякин А.	3. Кармазин С.	3. Проскурин М.
4. Слободянин В.	4. Воробьёв И.	4. Слободянин В.
5. Слободянин В.	5. Аполонский А.	5. Ерофеев И., Осин М.

Общая редакция — Ко́зел С., Слободянин В.

Оформление и вёрстка — Паринов Д., Цыбров Ф.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система LaTeX 2_ε.

Подписано в печать 13 апреля 2012 г. в 13:36.

141700, Московская область, г. Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Поплавок в ракете

В ракете, готовой к старту, находится большой аквариум, частично заполненный водой плотностью ρ_0. Внутрь аквариума помещен тонкий цилиндрический поплавок плотностью ρ с поперечным сечением S, прикреплённый ко дну лёгкой пружиной жесткостью k. Перед стартом ракеты пружина растянута на x_0, а поплавок частично выступает из воды.

1. Определите, увеличится или уменьшится высота выступающей части поплавка, если система придёт в движение с постоянным ускорением, направленным вверх. Ответ обоснуйте.

2. При достижении ракетой ускорения a высота выступающей над водой части поплавка изменилась на x. Найдите аналитическую зависимость x от a.

3. Рассчитайте численное значение x для следующих параметров задачи: $k = 10$ Н/м, $x_0 = 1$ см, $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, $S = 10^{-4}$ м^2, $g = 10$ м/с^2, $a = 3g$.

Задача 2. Пружина и шарик

На горизонтальном столе вертикально закреплена длинная труба, внутри которой установлена лёгкая пружина. Внутри трубы с высоты $H = 2$ м над столом без начальной скорости начинает падать шарик. Коснувшись верхнего витка пружины, шарик прилипает к нему. На рис. 1 приведён график зависимости кинетической энергии E_k падающего шарика от его высоты h над поверхностью стола. Определите длину L_0 недеформированной пружины, коэффициент жёсткости пружины k и массу шарика m. Считайте, что потери механической энергии в момент касания шариком верхнего витка пружины не происходит, и что закон Гука справедлив при любых деформациях пружины. Примите $g = 10$ м/с^2.

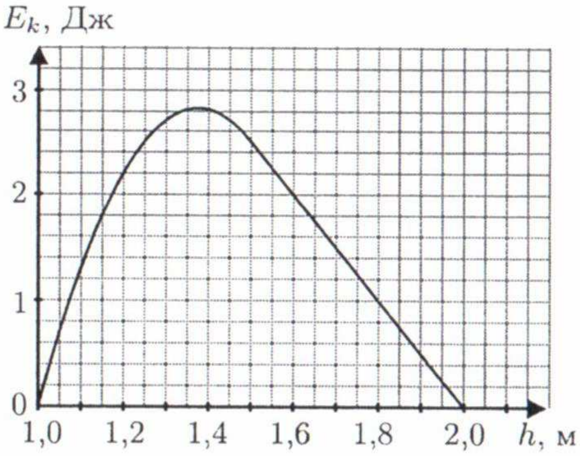


Рис. 1

Примечание. Для расчётов используйте выданный Вам отдельно увеличенный рисунок 1.

Задача 3. Предварительный подогрев

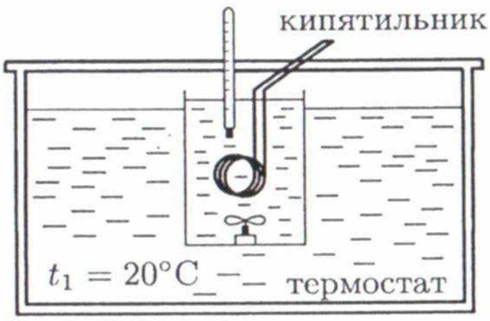


Рис. 2

В лаборатории у экспериментатора Глюка были электронагреватель с мешалкой, термостат и два тонкостенных химических стакана, линейные размеры которых отличались в 2 раза (толщина стенок стаканов одинакова). В термостате поддерживалась постоянная температура $t_1 = 20°C$ (рис. 2). Глюк решил исследовать, как зависит температура жидкости в стакане от времени (мешалка нужна для быстрого выравнивания температуры по всему объёму стакана).

Сначала он использовал стакан меньшего размера, который заполнил исследуемой жидкостью при температуре $t_1 = 20°C$ и поместил в термостат. Включив электронагреватель, Глюк обнаружил, что за первые $\tau_1 = 10$ с система нагрелась на $\Delta t_1 = 1°C$. Спустя продолжительное время температура жидкости установилась на отметке $t_2 = 40°C$.

Во втором эксперименте он взял больший стакан, заполнил его той же жидкостью, нагретой до температуры $t_3 = 35°C$, и включил тот же нагреватель в сеть. Через некоторое время τ_2 он с удивлением обнаружил, что температура содержимого в стакане понизилась на $\Delta t_2 = 0{,}5°C$.

Считайте, что теплоёмкость стаканов мала по сравнению с теплоёмкостью содержащейся в них жидкости.

1. Найдите температуру t_4, которая установится в стакане спустя продолжительное время?

2. Вычислите время τ_2.

Примечание. Известно, что поток энергии проходящий через слой вещества (стенки стакана) в единицу времени, прямо пропорционален разнице температур на границах слоя и площади поверхности слоя.

Задача 4. Диод

Полупроводниковый диод – это устройство, которое пропускает электрический ток только в одном направлении (рис. 3). Если диод включить в обратном направлении (рис. 4), ток через него течь не будет. Вольт-амперная характеристика, идеализированного диода приведена на графике (рис. 5).

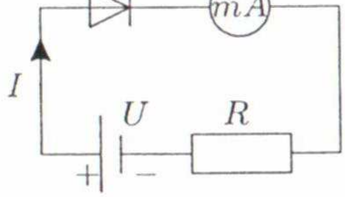


Рис. 3

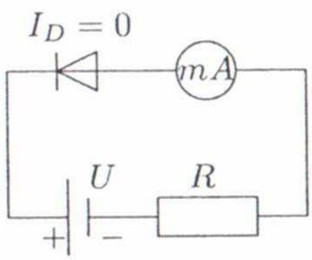


Рис. 4

1. На рисунке 6 изображен фрагмент разветвленной электрической цепи. Сопротивления резисторов равны: $R_1 = 6$ кОм, $R_2 = 5$ кОм. Определите падение напряжения на диоде и силу тока, протекающего через миллиамперметр.

2. Диод включили в цепь другой полярностью (рис. 7). Сопротивления резисторов не изменились. Для этого случая определите падение напряжения на диоде и силу тока, текущего через миллиамперметр.

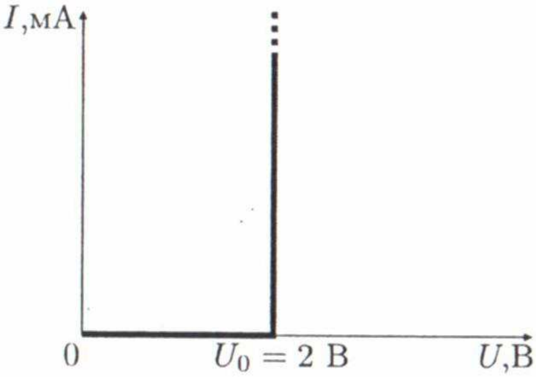


Рис. 5

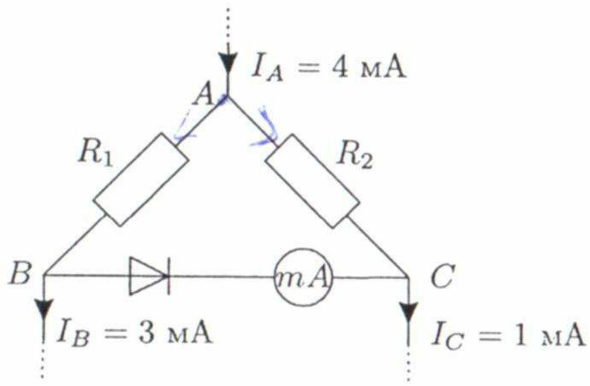


Рис. 6

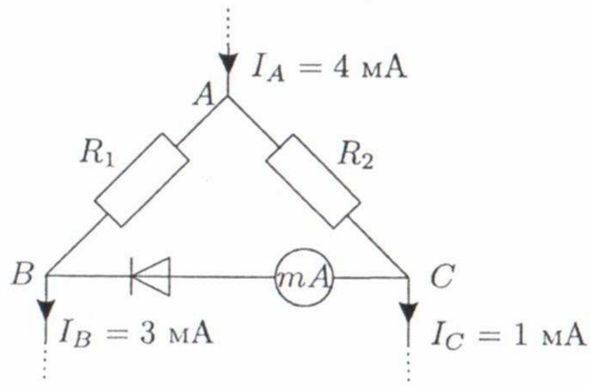


Рис. 7

Задача 5. Потерянное зеркало

В архиве Снеллиуса нашли чертеж, на котором были изображены два плоских зеркала M_1 и M_2, образующие двугранный угол φ, точечный источник света S и область AOB (она заштрихована), из которой можно было видеть одновременно оба изображения источника. От времени чернила выцвели, и невозможно стало разглядеть, как расположено зеркало M_2 и точечный источник S (рис. 8).

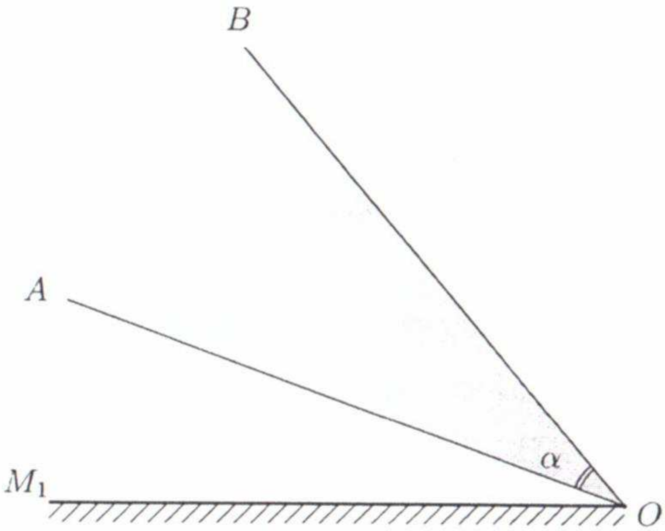


Рис. 8

Восстановите по имеющимся данным с помощью циркуля и линейки без делений положение зеркала M_2 и геометрическое место точек, где бы мог находиться источник S.

Вычислите угол φ между плоскостями зеркал, если $\angle AOB = \angle\alpha = 30°$.

10 класс

Задача 1. Платформа

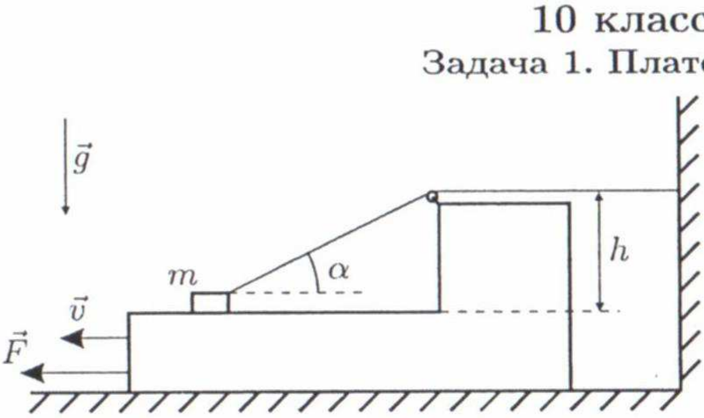


Рис. 9

На платформе с прямоугольным выступом высотой h лежит небольшое тело массой m. К нему прикреплён один конец невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, установленный на выступе платформы (рис. 9). Второй конец нити закреплён на вертикальной стене так, что участок нити между блоком и стеной горизонтален.

Платформу перемещают от стены с постоянной скоростью v. С какой минимальной силой F нужно тянуть платформу в тот момент, когда участок нити над платформой составляет угол α с горизонтом? Коэффициент трения между телом и платформой μ, между платформой и полом трения нет.

Задача 2. Вращающаяся трубка

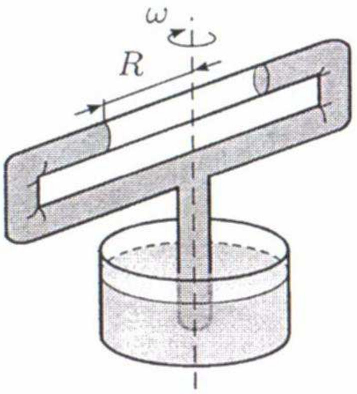


Рис. 10

Замкнутая стеклянная трубка с отводом, погружённым в открытый сверху сосуд со ртутью, в верхней своей части содержит столбик воздуха. Его границы со ртутью находятся на расстоянии R от оси симметрии системы (рис. 10). Определите, с какой угловой скоростью нужно вращать систему вокруг этой оси, чтобы давление воздуха изменилось в n раз. Начальное давление воздуха p_0, плотность ртути ρ, её уровень в сосуде можно считать неизменным.

Задача 3. Монотонный процесс

Один моль идеального газа переводят из состояния с известным давлением p_1 и известным объёмом V_1 в состояние с давлением $0{,}75p_1$ и объёмом $V_2 > V_1$. Зависимость $p(V)$ в этом процессе является линейной функцией (рис. 11).

При каких значениях конечного объёма V_2 температура в данном процессе изменяется монотонно?

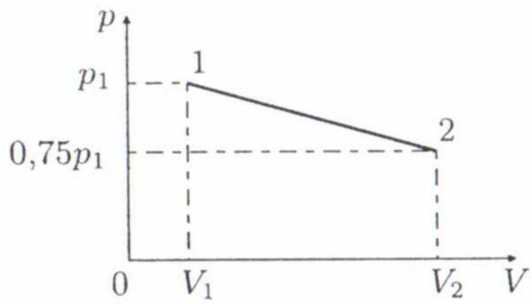


Рис. 11

Задача 4. Разлёт трёх заряженных частиц

Три частицы с одинаковыми зарядами в начальный момент удерживают в вершинах треугольника со сторонами R_1, R_2 и R_3 (рис. 12). Частицы одновременно отпускают, и они разлетаются так, что отрезки, соединяющие любую пару частиц остаются параллельными исходным. Каково отношение масс этих частиц $m_1 : m_2 : m_3$? Гравитационным притяжением пренебречь.

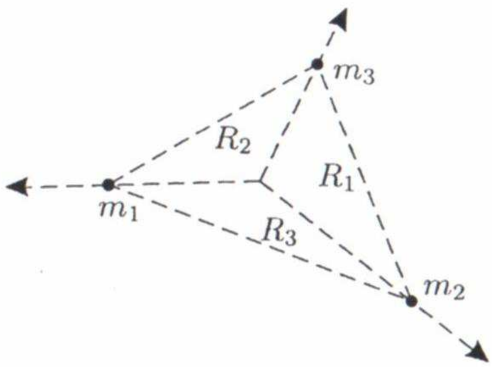


Рис. 12

Задача 5. Нелинейный элемент

К электрической цепи (рис. 13), составленной из одинаковых резисторов $R = 1$ Ом, нелинейного элемента с неизвестной вольт-амперной характеристикой и идеального амперметра, подключён источник, напряжение которого можно изменять. Зависимость показаний амперметра от напряжения источника задана (рис. 14). Положительное направление тока указано на рис. 13. Восстановите по этим данным вольт-амперную характеристику нелинейного элемента (зависимость силы тока через элемент от напряжения на нём).

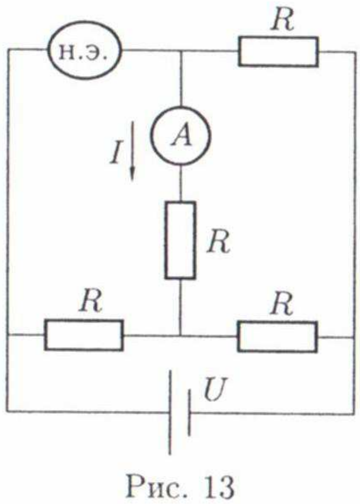


Рис. 13

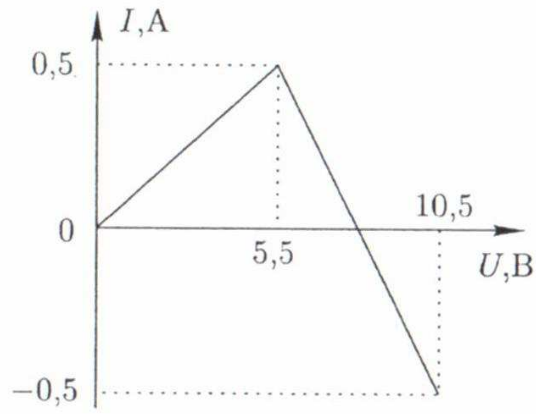


Рис. 14

11 класс

Задача 1. Пакет с мукой

Бумажный пакет с мукой падает без начальной скорости с высоты $h = 4$ см на чашку пружинных весов. Стрелка весов отклонилась до отметки $m_1 = 6$ кг и, после того, как колебания прекратились, стала показывать массу $m_0 = 2$ кг. Жёсткость пружины $k = 1{,}5$ кН/м. Найти массу M чашки.

Примечание. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Задача 2. Магнетизм

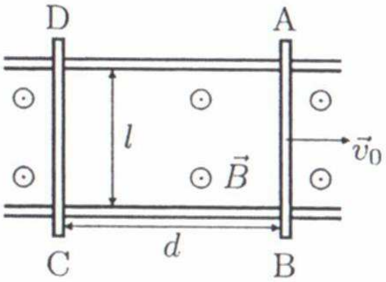


Рис. 15

По двум параллельным горизонтальным направляющим (рис. 15), расположенным на расстоянии l друг от друга, могут перемещаться без трения два металлических стержня AB и CD, имеющие массу m и электрическое сопротивление R каждый. Однородное магнитное поле индукции B направлено перпендикулярно плоскости направляющих. В начальный момент времени стержни расположены на расстоянии d друг от друга и перпендикулярны направляющим. Стержень CD неподвижен, а стержню AB сообщена скорость v_0, параллельная направляющим, в направлении от CD.

1. На каком расстоянии друг от друга будут находиться стержни через большой промежуток времени?

2. Сколько теплоты выделится в этой системе через большой промежуток времени?

Сопротивлением направляющих можно пренебречь.

Задача 3. Диполь в электрическом поле

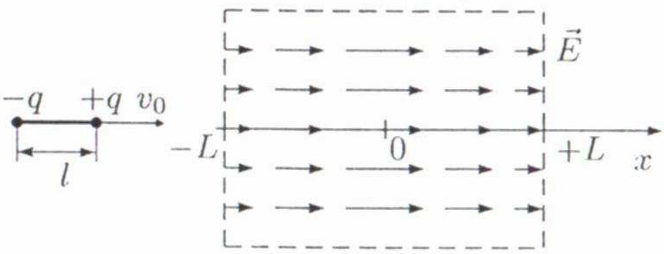


Рис. 16

Диполь представляет собой два точечных заряда $+q$ и $-q$, закреплённых на расстоянии l друг от друга. Масса диполя m. Диполь ориентирован вдоль оси x и влетает со скоростью v_0 в область длиной $2L \gg l$ (рис. 16). В этой области вектор напряжённости электрического поля $\vec{E}$ везде направлен вдоль оси x, а его модуль изменяется по закону $E(x) = E_0\left(1 - \dfrac{x^2}{L^2}\right)$. Найдите зависимость силы F, действующей на диполь, от его координаты x, максимальную скорость диполя, а также время пролёта области $2L$. Считайте, что ориентация диполя в пространстве не меняется.

Примечание. Такое электрическое поле можно создать между пластинами плоского конденсатора с помощью распределённого объёмного заряда.

Задача 4. Линейный процесс

Один моль идеального многоатомного газа переводят из состояния B, в котором температура равна $t_B = 217$ °C в состояние D так, что давление линейно зависит от объема, температура монотонно убывает, а к газу на протяжении всего процесса подводят тепло (рис. 17).

Найдите максимально возможную работу A_m, которую может совершить этот газ в таком процессе.

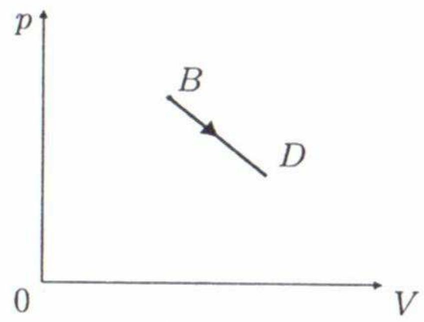


Рис. 17

Задача 5. Линзы в круг

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли рукопись в которой обсуждалось, как может идти луч через систему из N одинаковых линз, оптические центры которых лежат на окружности, а их плоскости перпендикулярны этой окружности и проходят через её центр. От времени чернила выцвели и на схеме остались видны только следы от плоскостей двух соседних линз и фокус одной из них (рис. 18). Из текста следовало, что луч, преломляясь в каждой из линз, идёт по сторонам правильного N–угольника. Вид линзы и её диаметр D приведены на рис. 19.

1. Какие это могли быть линзы – собирающие или рассеивающие?

Построением (с помощью циркуля и линейки без делений) восстановите:

2. положение ещё двух линз (слева и справа от изображенных на рисунке плоскостей линз);

3. возможные положения оптических центров четырёх получившихся линз;

4. возможный ход луча через эти линзы.

Ответ обоснуйте.

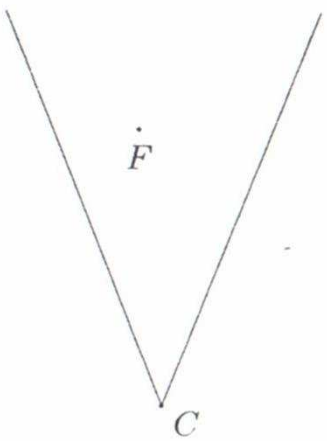


Рис. 18

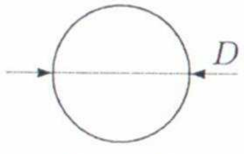


Рис. 19

Возможные решения
9 класс

Задача 1. Поплавок в ракете

Сила Архимеда зависит от ускорения системы. Действительно, если мысленно заменить водой погруженную в воду часть тела и записать для неё второй закон Ньютона, то получится $V_{\text{погр}}\rho_0\, a = F_A - V_{\text{погр}}\rho_0 g$, где F_A — сила, действующая со стороны окружающей жидкости на погружённый объём, откуда

$$F_A = V_{\text{погр}}\rho_0(g + a).$$

1. Условие равновесия поплавка в неподвижной ракете

$$0 = (V - zS)\rho_0 g - V\rho g - kx_0, \qquad (1)$$

где V — объём поплавка, z — высота выступающей над поверхностью воды части.

Предположим, что при ускоренном движении глубина погружения поплавка не изменилась, тогда второй закон Ньютона для поплавка примет вид:

$$V\rho a = (V - zS)\rho_0(g + a) - V\rho g - kx_0. \qquad (2)$$

Сравнивая (2) с (1), видим, что последнее равенство возможно лишь при отсутствии ускорения или при увеличении x_0. Значит, предположение неверно, поплавок всплывёт.

2. Пусть искомое изменение глубины равно x. Запишем второй закон Ньютона для поплавка в проекции на вертикальную ось при ускоренном движении:

$$V\rho a = (V - zS - xS)\rho_0(g + a) - V\rho g - k(x_0 + x). \qquad (3)$$

Подставив выражение для $(V - zS)$ из уравнения (1) в уравнение (3), получим

$$kx_0 a = kxg + \rho_0(g + a)xSg.$$

Окончательно,

$$x = x_0\frac{ka}{(k + \rho_0 S(g + a))g}.$$

3. При ускорении $a = 3g$ найдём

$$x = 2{,}14 \text{ см}.$$

Задача 2. Пружина и шарик

На первом участке падения (до касания пружины $L_0 < h < H$) кинетическая энергия шарика равна уменьшению его потенциальной энергии:

$$E_{\text{к}} = mg(H - h).$$

Таким образом, по наклону начального линейного участка графика находим:

$$mg = \frac{\Delta E_к}{\Delta h} = 5 \text{ Н}, \qquad \text{откуда} \qquad m = 0{,}5 \text{ кг}.$$

Длину пружины L_0 определим по значению h, при котором нарушается линейный характер зависимости $E_к(h)$.

$$L_0 = 1{,}5 \text{ м}.$$

После контакта шарика с пружиной уменьшение его потенциальной энергии равно сумме кинетической энергии шарика и потенциальной энергии деформированной пружины:

$$mg(H - h) = \frac{k(L_0 - h)^2}{2} + E_k. \tag{4}$$

Мы получили квадратное уравнение относительно h. Максимум квадратичной функции вида $\left(y = ax^2 + bx + c\right)$ достигается при $x_m = -b/(2a)$.

Следовательно, в уравнении (4) значение h_m, при котором кинетическая энергия шарика максимальна, определяется выражением:

$$h_m = L_0 - \frac{mg}{k}. \tag{5}$$

Из графика видно, что максимум кинетической энергии достигается при

$$h_m = 1{,}375 \text{ м}. \tag{6}$$

Приравнивая (5) и (6), находим $k = 40$ Н/м.

Задача 3. Предварительный подогрев

Заметим, что мощность тепловых потерь стакана $N_1 = \alpha S(t_i - t_1)$, где S — площадь внешней поверхности стакана, t_i — температура жидкости в стакане, α — коэффициент пропорциональности.

Запишем уравнение теплового баланса для первого стакана:

$$Q_1 = m_1 C \Delta t_1 = (N_0 - N_1)\tau_1 \approx N_0 \tau_1, \tag{7}$$

где N_0 — мощность нагревателя, C — удельная теплоёмкость жидкости в стакане, $m_1 = \rho V_1$ — масса жидкости, находящейся в первом стакане. Тепловыми потерями пренебрегаем из-за малой разности температур.

Когда процесс теплообмена установится, то:

$$N_0 = N_1, \qquad \text{или} \qquad N_0 = \alpha S_1(t_2 - t_1). \tag{8}$$

Аналогичным образом для второго случая запишем:

$$Q_2 = m_2 C\Delta t_2 \approx (N_0 - \alpha S_2(t_3 - t_1))\tau_2, \tag{9}$$

$$N_0 = \alpha S_2(t_4 - t_1). \tag{10}$$

Из свойств подобия следует, что $S \sim l^2$, $V \sim l^3$, откуда $S_2 = 4S_1$, $m_2 = 8m_1$. Из (8) и (10) получим:

$$S_1(t_2 - t_1) = 4S_1(t_4 - t_1), \qquad \text{или} \qquad t_4 = 25°\text{C}.$$

Из (8) следует:

$$\alpha S_1 = \frac{N_0}{t_2 - t_1}. \tag{11}$$

Искомое время τ_2 найдём из (9) с учётом (7):

$$\tau_2 \approx \frac{8m_1 C\Delta t_2}{N_0 - 4\alpha S_1(t_3 - t_1)}; \tag{12}$$

$$\tau_1 \approx \frac{m_1 C\Delta t_1}{N_0}. \tag{13}$$

Поделив почленно (12) на (13), с учётом (11), получим:

$$\tau_2 \approx \tau_1 \left[\frac{8\Delta t_2}{\Delta t_1}\frac{t_2 - t_1}{(t_2 - t_1) - 4(t_3 - t_1)}\right] \approx 20 \text{ с}.$$

Задача 4. Диод

Пусть I – сила тока, текущего через диод.

1. Предположим, что диод заперт ($I = 0$). Тогда сила тока, текущего через резистор R_2 равна $I_C = 1$ мА, а через резистор R_1, соответственно $I_B = 3$ мА. В этом случае напряжение U на диоде равно $I_B R_1 - I_C R_2 = 13$ В.

При такой полярности диод заперт и ток через него не течет, как мы и предполагали.

2. Полярность подключения диода изменили (рис. 20), поэтому он не может быть заперт. Через диод течёт ток I и напряжение на нем равно $U_0 = 2$ В.

Для силы токов каждой из ветвей выполняются соотношения:

$$I_B = I_{AB} + I, \qquad I_{AC} = I + I_C, \tag{14}$$

для напряжений:

$$R_1 I_{AB} = R_2 I_{AC} + U_0. \qquad (15)$$

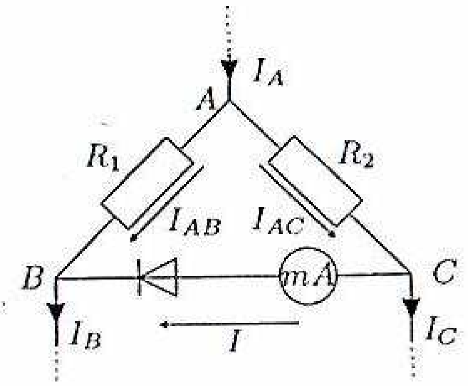


Рис. 20

Отсюда,

$$R_1(I_B - I) = R_2(I_C + I) + U_0,$$

$$I = \frac{R_1 I_B - R_2 I_C - U_0}{R_1 + R_2} = 1 \text{ мА}.$$

Задача 5. Потерянное зеркало

Зеркала, по условию, образуют двугранный угол. Область, из которой видны оба изображения источника, содержит точку O каждого зеркала. Значит, зеркала пересекаются в точке O. Область, из которой видно изображение источника S в зеркале M_1, ограничивается лучом OB (если бы она ограничивалась лучом OA, в области AOB не было бы видно изображения в этом зеркале). Значит, изображение источника в зеркале M_1 находится на продолжении прямой BO за точку O (рис. 21). Аналогично, изображение источника в зеркале M_2 находится на продолжении прямой AO за точку O.

Геометрическое место точек, где мог бы находитья источник — это луч OC, получающийся отражением луча OB_1 в зеркале M_1 ($\angle B_1OM_1 = \angle COM_1$).

Поскольку источник S, лежащий на луче OC, при отражении в зеркале M_2 должен попасть на луч OA_1, то зеркало OM_2 лежит на биссектрисе угла $\angle COA_1$.

На рисунке для некоторого положения источника S показаны положения его изображений в зеркалах M_1 и M_2.

Луч OA_1 — это изображение луча OC в зеркале M_2. При повороте зеркала M_2 на угол φ, изображение луча OC повернётся на угол 2φ. При этом плоскость зеркала M_2 перейдёт в плоскость зеркала M_1, а луч OA_1 перейдёт в луч OB_1. Значит,

$$\angle A_1OB_1 = 2\varphi = \angle AOB = 30^\circ, \qquad \text{откуда} \qquad \varphi = 15^\circ.$$

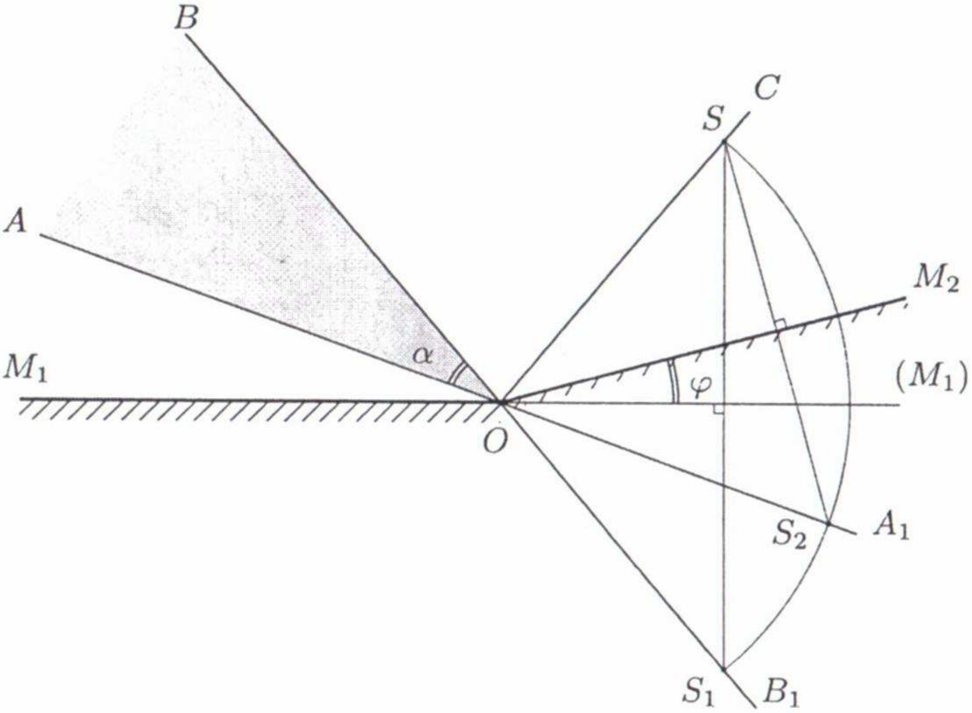


Рис. 21

10 класс

Задача 1. Платформа

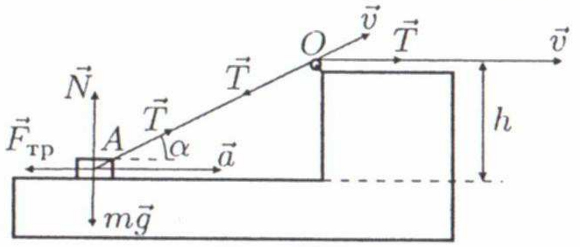


Рис. 22

Будем решать задачу в системе отсчета, связанной с платформой (рис. 22). Здесь стенка удаляется от платформы с постоянной скоростью v, а тело движется по платформе со скоростью $v_a = v/\cos\alpha$, так как проекция скорости точки A на отрезок нити AO равна v. Определим ускорение, с которым движется тело по платформе. Относительно точки O точка A движется по окружности радиуса $l = h/\sin\alpha$ со скоростью $v'_A = v_A \cdot \sin\alpha = v \cdot \text{tg}\alpha$. Центростремительное ускорение точки A направлено вдоль AO к точке O и равно $a_n = v^2\text{tg}^2\alpha/l$. Полное ускорение точки A направлено горизонтально и равно

$$a = \frac{a_n}{\cos\alpha} = \frac{v^2\text{tg}^2\alpha}{l\cos\alpha} = \frac{v^2}{h}\text{tg}^3\alpha.$$

Теперь рассмотрим действующие на тело силы. В проекции на горизонтальную ось

$$ma = T\cos\alpha - \mu N,$$

на вертикальную

$$N + T\sin\alpha - mg = 0.$$

Отсюда,

$$N = mg - T\sin\alpha, \qquad T = \frac{m(a + \mu g)}{cos\alpha + \mu sin\alpha};$$

$$N = \frac{m(g\cos\alpha - a\sin\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Отметим сразу, что движение по платформе без отрыва от нее возможно только при $\alpha \leqslant \operatorname{arctg}(a/g)$.

Сила, которую необходимо прикладывать к платформе,

$$F = \mu N + T(1 - \cos\alpha).$$

Подставляя N и T, получаем:

$$F = m\left(\frac{a + \mu g}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} - a\right) = m\left(\frac{v^2 \operatorname{tg}^3\alpha + \mu g h}{h(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} - \frac{v^2}{h}\operatorname{tg}^3\alpha\right).$$

Задача 2. Вращающаяся трубка

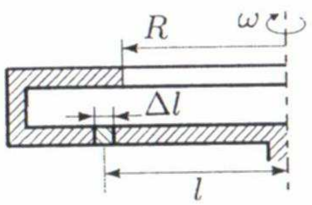


Рис. 23

Выделим небольшой участок ртути длиной Δl, находящийся на расстоянии l от оси вращения (рис. 23). Масса этого участка $\Delta m = \rho\Delta l S$, где S — площадь поперечного сечения трубки. Пусть p_1 — давление ртути на правой границе участка, p_2 — на левой, $\Delta p = p_2 - p_1$. Рассматриваемый участок движется с центростремительным ускорением $a = \omega^2 l$. По второму закону Ньютона:

$$\Delta m\omega^2 l = (p_2 - p_1)\,S = \Delta p S, \qquad \text{откуда} \qquad \Delta p = \rho\omega^2 l\Delta l.$$

На рис. 24 представлен график зависимости $\Delta p/\Delta l$ от расстояния до оси вращения l. Изменение давления при перемещении от $l = 0$ до $l = r$ есть площадь треугольника под этим графиком:

$$p(r) - p(0) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2. \qquad (16)$$

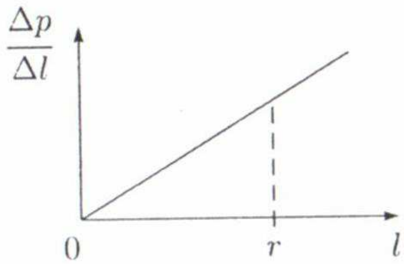


Рис. 24

Давление воздуха после раскручивания $p = np_0$. Поскольку температура воздуха сохраняется, то $pr = p_0 R$, где r — новое расстояние от центра вращения до границы воздуха со ртутью. Подставив эти условия в уравнение (16), получим:

$$(n-1)\,p_0 = \frac{1}{2}\rho\omega^2\frac{R^2}{n^2}, \qquad \text{откуда} \qquad \omega = \frac{n}{R}\sqrt{\frac{2p_0(n-1)}{\rho}}.$$

Задача 3. Монотонный процесс

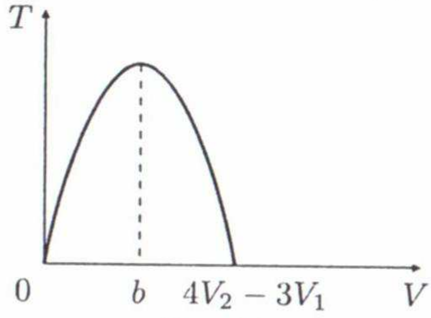


Рис. 25

Уравнение линейного процесса:

$$p = p_1 - (V - V_1)\beta,$$

где β — модуль углового коэффициента наклона прямой.

$$p(V_2) = 0{,}75p_1,$$

$$\beta = \frac{p_1}{4(V_2 - V_1)}.$$

Поэтому

$$p = p_1 - \frac{p_1}{4}\frac{V - V_1}{V_2 - V_1}. \tag{17}$$

Из уравнения Менделеева — Клапейрона

$$pV = \left(p_1 - \frac{p_1}{4}\frac{V - V_1}{V_2 - V_1}\right)V = RT, \tag{18}$$

видно, что температура зависит от объёма как

$$T = k(4V_2 - 3V_1 - V)V, \tag{19}$$

где коэффициент пропорциональности $k = p_1/(4(V_2 - V_1))$. Уравнение (19) — парабола (рис. 25) с вершиной $b = (4V_2 - 3V_1)/2$. По условию температура должна меняться монотонно. Возможны два случая: возрастание или убывание температуры в течение всего процесса.

Рассмотрим случай, когда температура возрастает. Это означает, что объёмы V_1 и V_2 принадлежат отрезку $[0; b]$:

$$\frac{4V_2 - 3V_1}{2} \geqslant V_2 > V_1 \geqslant 0,$$

$$V_2 \geqslant 3V_1/2.$$

При убывании температуры объёмы V_1 и V_2 принадлежат отрезку $[b; 2b]$:

$$\frac{4V_2 - 3V_1}{2} \leqslant V_1 < V_2 \leqslant 4V_2 - 3V_1,$$

$$V_1 < V_2 \leqslant 5V_1/4.$$

Задача 4. Разлёт трёх заряженных частиц

В любой момент времени отношение расстояний между частицами $r_1 : r_2 : r_3$ остается равным отношению исходных расстояний $R_1 : R_2 : R_3$, поскольку конфигурации частиц являются подобными треугольниками. По этой же причине углы α_1, α_2, α_3 при вершинах m_1, m_2, m_3 остаются неизменными (рис. 26). Рассмотрим две сходственные стороны треугольников, например, R_3 и r_3. Проведём к ним перпендикуляр ON. Стороны параллельны, если проекции скоростей и ускорений частиц m_1 и m_2 на ON равны, это обусловлено тем, что частицы с массами m_1 и m_2 взаимодействуют лишь с зарядом частицы массой m_3. Исходя из закона Кулона и второго закона Ньютона можно получить выражения для ускорений и их проекций:

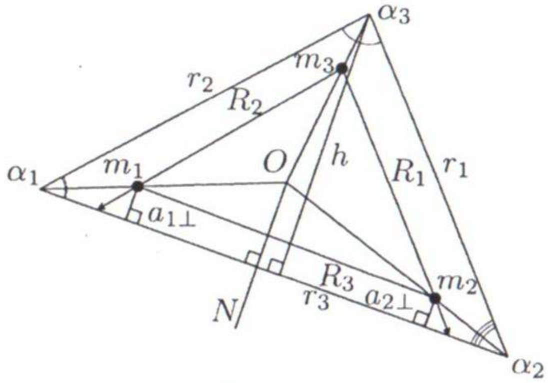


Рис. 26

$$a_{1\perp} = \frac{kq^2 \sin\alpha_1}{m_1 r_2^2} = a_{2\perp} = \frac{kq^2 \sin\alpha_2}{m_2 r_1^2}.$$

Высота h треугольника, опущенная на сторону r_3, равна:

$$h = r_2 \sin\alpha_1 = r_1 \sin\alpha_2.$$

Поэтому из предшествующего равенства следует

$$\frac{1}{m_1 r_2^3} = \frac{1}{m_2 r_1^3},$$

откуда

$$m_1 : m_2 = r_1^3 : r_2^3.$$

Аналогичным образом найдём отношение масс $m_2 : m_3 = r_2^3 : r_3^3$. Следовательно, $m_1 : m_2 : m_3 = r_1^3 : r_2^3 : r_3^3$.

Задача 5. Нелинейный элемент

Определим силу тока и напряжение на элементе при силе тока I через амперметр и напряжении $U_{AB} = U$ на входе цепи.

Пусть $U_{DB} = U_3$, $U_{CB} = U_1$, $U_{AD} = U_2 = U - U_3$, $U_{CD} = IR$ (рис. 27). Тогда для суммы токов в узле D:

$$I + I_2 - I_3 = 0,$$

откуда

$$\frac{U - U_3}{R} + I = \frac{U_3}{R},$$

$$U_3 = \frac{U + IR}{2}. \tag{20}$$

Сила тока через элемент с учётом (20):

$$I_Э = I + I_1 = I + \frac{U_1}{R} = I + \frac{IR + U_3}{R} = \frac{5}{2}I + \frac{U}{2R}. \tag{21}$$

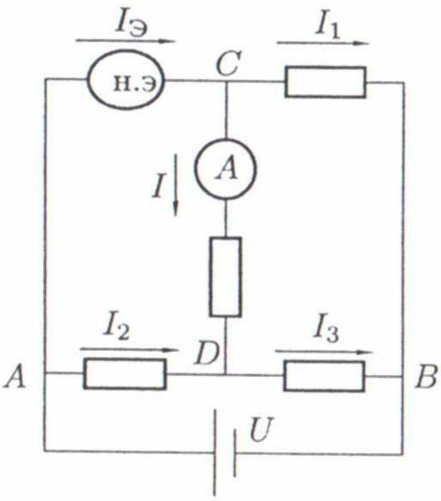


Рис. 27

Напряжение на элементе:

$$U_Э = U - IR - U_3 = \frac{U - 3IR}{2}. \tag{22}$$

Рассмотрим участок зависимости $I(U)$ в диапазоне напряжений от $U = 0$ В до $U = 5{,}5$ В. Так как на этом участке сила тока нелинейного элемента линейно зависит от напряжения и зависимости (20) и (21) линейны, то график $I_э(U_э)$ — прямая. Для построения прямой достаточно двух точек:

$$U = 0\ \text{В}, \quad I_э = 0\ \text{А}, \quad U_э = 0\ \text{В}$$

$$U = 5{,}5\ \text{В}, \quad I_э = 4\ \text{А}, \quad U_э = 2\ \text{В}.$$

Аналогично для участка от $U = 5{,}5$ В до $U = 10{,}5$ В. Сила тока не зависит от напряжения вплоть до $U_Э = 6$ В из (22).

Окончательно, зависимость $I_Э(U_Э)$ выглядит так (рис. 28):

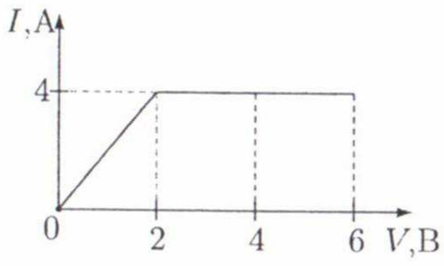


Рис. 28

11 класс

Задача 1. Пакет с мукой

Пусть m – масса пакета.

Его скорость непосредственно перед ударом равна $v = \sqrt{2gh}$. Удар абсолютно неупругий. Поэтому скорости пакета и чашки сразу после удара одинаковы и равны

$$V = \frac{m}{m + M}v.$$

До удара на пружине висела только чашка, поэтому удлинение пружины было равно

$$x_1 = \frac{Mg}{k}.$$

В момент максимального отклонения удлинение равно

$$x_2 = \frac{Mg}{k} + \frac{m_1 g}{k}.$$

Запишем закон сохранения энергии для момента времени сразу после удара и в момент максимального отклонения:

$$\frac{(M+m)V^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = \frac{kx_2^2}{2} - (M+m)g(x_2 - x_1).$$

После того как наступит равновесие, весы будут показывать массу пакета с мукой. Поэтому $m = m_0$.

$$\frac{(M+m_0)\cdot 2gh\cdot\left(\frac{m_0}{M+m_0}\right)^2}{2} + \frac{k\cdot M^2g^2}{2k^2} = \frac{k\cdot\left(\frac{Mg}{k}+\frac{m_1g}{k}\right)^2}{2} - (M+m_0)\cdot g\cdot\frac{m_1 g}{k}.$$

После упрощения получаем

$$M = \frac{2km_0^2h}{m_1g(m_1 - 2m_0)} - m_0 = 2 \text{ кг}.$$

Задача 2. Магнетизм

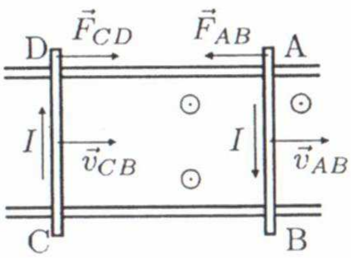


Рис. 29

При изменении площади контура $ABCD$, образованного стержнями и направляющими, из-за возникающей ЭДС индукции в системе течёт электрический ток (рис. 29). Силы Ампера действует таким образом, что тормозят стержень AB и разгоняют CD. При выравнивании скоростей v_{AB} и v_{CD} магнитный поток через контур $ABCD$ перестаёт изменяться, исчезает ЭДС индукции и индуктивный ток, а с ними и силы Ампера. С этого момента стержни движутся с равными и одинаковыми скоростями.

За малый промежуток времени Δt изменение площади контура

$$\Delta S = (v_{AB} - v_{CD})l\Delta t,$$

изменение магнитного потока

$$\Delta\Phi = B\Delta S = B(v_{AB} - v_{CD})l\Delta t,$$

ЭДС индукции

$$|\mathscr{E}_{и}| = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = B(v_{AB} - v_{CD})l,$$

ток в контуре

$$I_{AB} = I_{CD} = \frac{|\mathscr{E}_{и}|}{2R} = \frac{B(v_{AB} - v_{CD})l}{2R},$$

силы Ампера

$$F_{AB} = F_{CD} = \frac{B^2 l^2 (v_{AB} - v_{CD})}{2R},$$

ускорения стержней направлены противоположно и равны

$$a = \frac{B^2 l^2 (v_{AB} - v_{CD})}{2mR}.$$

С учётом направления ускорения

$$\frac{\Delta v_{AB}}{\Delta t} = -\frac{B^2 l^2 (v_{AB} - v_{CD})}{2mR},$$

$$\frac{\Delta v_{CD}}{\Delta t} = \frac{B^2 l^2 (v_{AB} - v_{CD})}{2mR}.$$

Домножая обе части уравнений на Δt и учитывая, что $(v_{AB} - v_{CD})\Delta t = \Delta d$ - изменение расстояния между стержнями, получаем

$$\Delta v_{AB} = -\frac{B^2 l^2}{2mR}\Delta d,$$

$$\Delta v_{CD} = \frac{B^2 l^2}{2mR}\Delta d.$$

Тогда

$$v_{AB} = v_0 - \frac{B^2 l^2}{2mR}\Delta d,$$

$$v_{CD} = \frac{B^2 l^2}{2mR}\Delta d.$$

При выравнивании скоростей

$$v_0 - \frac{B^2 l^2}{2mR}\Delta d = \frac{B^2 l^2}{2mR}\Delta d,$$

отсюда

$$\Delta d = \frac{m v_0 R}{B^2 l^2}.$$

Окончательно установившееся расстояние между стержнями

$$d' = d + \Delta d = d + \frac{mv_0 R}{B^2 l^2}.$$

Скорости при этом

$$v_{AB} = v_{CD} = v_0/2.$$

В системе выделится теплота

$$Q = \frac{mv_0^2}{2} - 2\frac{m(v_0/2)^2}{2} = \frac{mv_0^2}{4}.$$

Задача 3. Диполь в электрическом поле

Сила, действующая на диполь со стороны электрического поля, является суммой сил, действующих на заряды $+q$ и $-q$. Пусть координата центра диполя x, тогда

$$F_x(x) = qE(x + l/2) - qE(x - l/2) = q\frac{dE}{dx}l = -2qlE_0\frac{x}{L^2}.$$

Запишем второй закон Ньютона для диполя:

$$m\ddot{x} = F(x) = -2\frac{qlE_0}{L^2}x.$$

Полученное уравнение имеет вид уравнения гармонических колебаний с циклической частотой ω:

$$\omega = \sqrt{2\frac{qlE_0}{mL^2}}.$$

Его решение можно записать в виде:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \qquad v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi).$$

Постоянные A и ω найдём из начальных условий:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{v_0}{\omega L} + \pi, \qquad A = L\sqrt{1 + \left(\frac{v_0}{\omega L}\right)^2}.$$

Зная уравнение движения, можно найти наибольшую скорость диполя:

$$v_{max} = A\omega = \sqrt{v_0^2 + 2\frac{qlE_0}{m}}.$$

Фазу колебаний в момент, когда диполь покинет область поля, найдём из тригонометрии:

$$\varphi_1 = 2\pi - \operatorname{arctg}\frac{v_0}{\omega L}.$$

Зная начальную и конечную фазу, можно найти время пролёта:

$$t = \frac{\varphi_1 - \varphi}{\omega} = \frac{1}{\omega}\left(\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{v_0}{\omega L}\right).$$

Задача 4. Линейный процесс

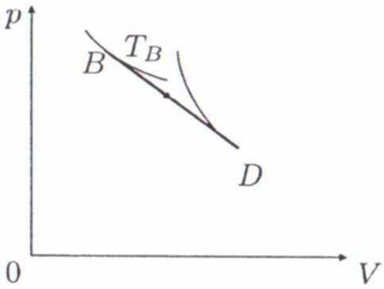


Рис. 30

Запишем уравнение линейного процесса BD в виде $p(V) = p_D + k(V - V_D)$, где p_D и V_D есть давление и объём газа в состоянии D, соответственно. Отсюда, $k = -\dfrac{p_D}{V_0 - V_D}$, где V_0 – точка пересечения прямой BD с осью объёмов. Процесс прекращается в точке D, где данной прямой касается адиабата (теплота подводится) (рис. 30). Условием касания адиабаты и прямой является совпадение коэффициентов наклона в точке D.

Уравнение адиабаты:

$$pV^\gamma = p_D {V_D}^\gamma.$$

Продифференцируем уравнение адиабаты и найдем угловой коэффициент в точке D:

$$p = \frac{p_D {V_D}^\gamma}{V^\gamma},$$

$$p'(V_D) = -\gamma\frac{p_D {V_D}^\gamma}{{V_D}^{\gamma+1}} = -\gamma\frac{p_D}{V_D}.$$

Приравнивая $p'(V_D) = k$, при $\gamma = 4/3$ (газ многоатомный), получим $V_D = 4V_0/7$.

Чтобы работа была максимальной, необходимо прямую BD проводить как можно более полого. В пределе это будет касательная к изотерме в точке B. Аналогично находим

$$V_B = \frac{V_0}{2}.$$

Далее,

$$p_D = 2p_B - \frac{p_B}{V_B}V_D = \frac{6}{7}p_B.$$

Максимальная работа равна

$$A_m = \frac{1}{2}(p_B + p_D)(V_D - V_B) = \frac{1}{2}p_B V_B\left(1 + \frac{6}{7}\right)\left(\frac{8}{7} - 1\right) = \frac{13}{98}RT_B = 540{,}15 \text{ Дж},$$

где $T_B = 490$ К.

Задача 5. Линзы в круг

1. По условию плоскости линз образуют правильный многоугольник. Из центра C проводим два луча (CD и CE), образующие с ближайшими прямыми (CA и CB) углы $\alpha = 2\pi/N$. Это и будут проекции плоскостей линз на плоскость рисунка.

2. Предположим, что фокус F принадлежит левой линзе. Проведем через него перпендикуляр к этой линзе (рис. 31). Точка пересечения перпендикуляра с плоскостью линзы даст положение её оптического центра O. Отметим на остальных плоскостях оптические центры линз.

3. Многоугольник правильный, поэтому ход луча относительно плоскости линзы симметричен. Из формулы для тонкой собирающей линзы следует, что при таком ходе луч пересекает главную оптическую ось линзы на двойном фокусном расстоянии. Если же линза рассеивающая, то точку двойного фокуса пересечёт воображаемое продолжения луча. Откладываем на главных оптических осях каждой двойные фокусные расстояния. Луч, идущий через двойные фокусы, лежащие внутри ACB, пойдёт относительно точки C дальше оптических центров линз. Это соответствует собирающей линзе. Луч, идущий через двойные фокусы, лежащие снаружи ACB, пойдёт относительно точки C ближе оптических центров линз. Это соответствует рассеивающей линзе. Пусть эти лучи пересекают плоскости линз (CA и CB) в точках A_1, B_1 и A_2, B_2. Откладывая от центра C отрезки длиной CB_1, мы восстановим точки, через которые пройдёт искомый луч, если линзы собирающие. Если откладывать от центра C отрезки длиной CB_2, мы восстановим точки, через которые пройдёт искомый луч, если линзы рассеивающие. Убеждаемся, что в обоих случаях луч проходит сквозь линзы (её радиус равен $D/2$).

4. Теперь предположим, что фокус F относится к правой линзе. Выполнив все построения аналогично ранее рассмотренному случаю, убеждаемся, что луч пройдёт мимо линз (на расстоянии большем её радиуса $D/2$).

5. Итак, возможны два варианта. Линза может быть собирающей и рассеивающей. Фокус F принадлежит левой линзе.

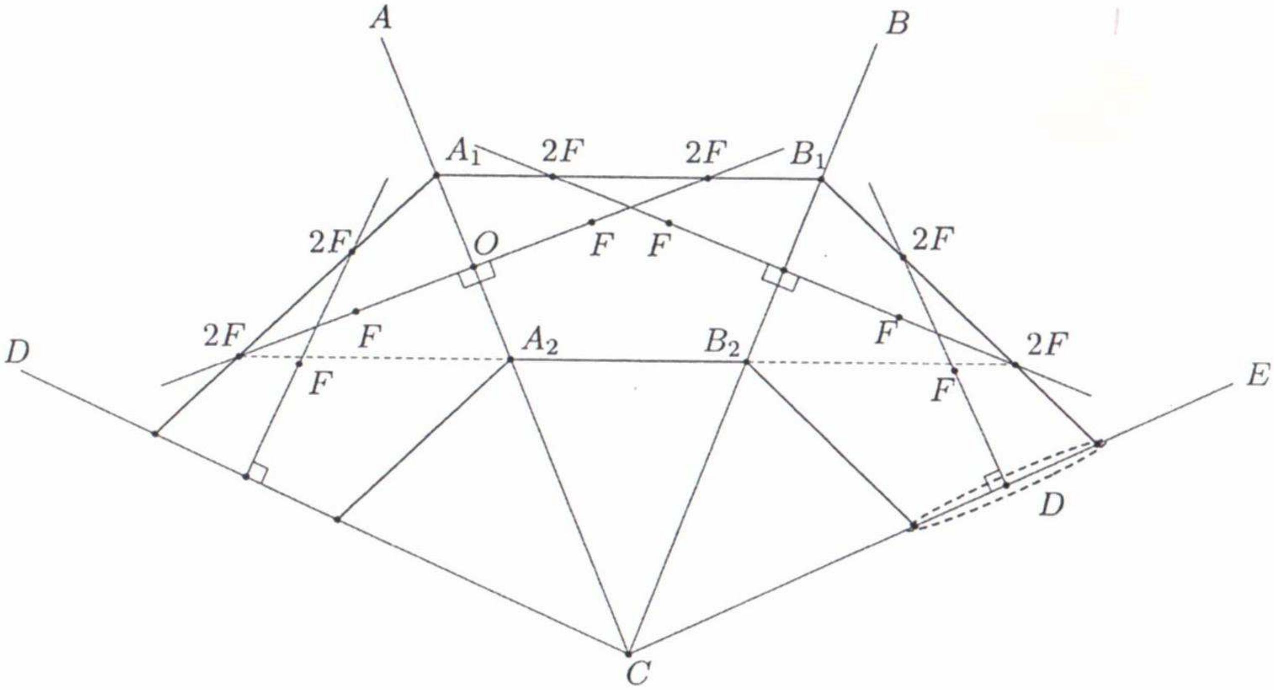


Рис. 31