Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
по математике
2017-2018 учебный год
10 класс
Максимальный балл – 35

1. Клетчатый прямоугольник размера 99×2017 разрезали на полоски размера 1×3. Могло ли при этом получиться ровно 2017 вертикальных полосок?

Ответ: Нет.

Решение-1. Раскрасим строки в три цвета (красный-желтый-зеленый, и т.д.). Клеток красного цвета будет 33·2017 – кратно 3. Но каждая вертикальная полоска покрывает одну красную клетку, горизонтальная – 0 или 3. Однако 2017 на 3 не делится – противоречие.

Решение-2. Рассмотрим верхнюю строчку, и те вертикальные полоски, которые начинаются в ней: их количество – число вида $3n+1$ (поскольку 2017 – такое). Посмотрим, сколько вертикальных начинается во второй строке: их количество – число вида 3k (полоски с началом в первой строке сюда достают). Аналогично, число полосок с началом в третьей – того же вида. Далее те же рассуждения повторяются для всех строк (всего – 33 раза). Для числа вертикальных полосок это дает 33 слагаемых вида 3n+1, и много чисел вида, и много чисел вида 3k;сумма всех будет делиться на 3…..

Оценивание: Полное решение – 7 баллов. Рассуждения типа «если делать так, то не получится» – 0 баллов.

2. Двое игроков по очереди выкладывают на стол монеты достоинством в 1, 2, 5 или 10 руб. Выигрывает тот игрок, после хода которого сумма денег на столе впервые превысит 100 руб. Кто выиграет при правильной игре (т.е., при наилучших действиях обоих игроков)?

В начале игры денег на столе нет. Запас монет всех достоинств неограничен. За ход выкладывается ровно одна – любая – монета.

Ответ: выигрывает второй.

Решение: Игрок, делающий ход в случае, когда на столе более 90 руб., выигрывает (ходом 10). Поэтому игрок, делающий ход в позиции «90», проигрывает. Выигрывающая стратегия второго состоит в «дополнении» хода врага до числа, кратного 3. Именно, на ходы 1, 10 надо отвечать 2, а на ходы 2, 5 – отвечать 1 (если, конечно, сумма не превысила 90 – тогда ход 10 сразу дает победу). При такой стратегии, второй не может проиграть – и, значит, выиграет.

Оценивание: Полное решение – 7 баллов. Засчитывать (при предъявлении правильной стратегии) «доказательную часть» любой степени убедительности.

3. В сети магазинов «Пятнадцатёрочка» (состоящей из 15 магазинов, занумерованных числами от 1 до 15) проводится акция: покупателю, сделавшему покупку на сумму свыше 555 рублей, вручается ластик в форме гнома. Гномов различных видов – пятнадцать (и они также нумеруются числами от 1 до 15); покупателю, собравшему полный набор из гномов всех видов, полагается Приз. Программист Петя написал программу, распределяющую коробки с гномами (в каждой коробке – гномы только одного вида) по магазинам: в магазин с номером k поставляется количество коробок с гномами вида j, равное остатку от деления числа $7k+jx$ на 17. Может ли менеджер сети выбрать параметр «x» (целое число от 1 до 16) так, что ни в один из 15 магазинов не поступят гномы всех 15 видов?

Ответ: Может.

Решение: для $x=10$, в магазине с номером k нет гномов с номером k:

$7k + jx = 7k + 10k = 17k$ делится на 17.

Оценивание: Полное решение – 7 баллов. За правильный ответ с частичным обоснованием (явная проверка при $x=10$ для некоторых – но не всех!) k – от 1 до 3 баллов.

За правильный ответ (без указания x=10) – 0 баллов.

Замечание: Такое x – единственно.

4. Найдите все значения x, для которых справедливо равенство:

$$\frac{1}{(2x+1)(3x+2)}+\frac{1}{(3x+2)(4x+3)}+\ldots+\frac{1}{(100x+99)(101x+100)}=\frac{99}{(2x+1)(101x+100)}$$

Ответ: при всех x из ОДЗ.
Решение: Домножим равенство на $(x+1)$. Заметим, что

$$\frac{x+1}{(kx+k-1)((k+1)x+k)}=\frac{1}{kx+k-1}-\frac{1}{(k+1)x+k}.$$

Поэтому, после такого преобразования, в левой части равенства, после сокращений, останется только

$$\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{101x+100}=\frac{99x+99}{(2x+1)(101x+100)}$$

– т.е., в точности то, что получилось после домножения в правой части. Осталось заметить, что x = –1 удовлетворяет уравнению (мы могли приобрести этот корень при домножении…).

Оценивание: Полное решение – 7 баллов. Были по ОДЗ, или нет проверки «исключительных» значений (которые могли возникнуть при сужении/расширении ОДЗ) – снять 2 балла.

5. На каждой из сторон треугольника единичной площади отмечено по пять точек, делящих соответствующую сторону на 6 равных частей. Рассматриваются всевозможные треугольники с вершинами в отмеченных точках, и считаются их площади. Найдите наибольшее значение этих площадей.

Ответ: $\frac{7}{12}$.

Решение.

А) Пусть есть сторона «нового» треугольника, лежащая на стороне «старого». Тогда (это) основание нового составляет не более $\frac{4}{6}$ основания старого, а соответствующая высота составляет (пропорциональные отрезки) не более $\frac{5}{6}$ высоты старого, так что площадь нового не превышает $\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$.

Б) Пусть все вершины нового лежат на разных сторонах старого. Отмеченные точки делят каждую сторону старого на 6 равных частей. Пусть вершины нового делят стороны старого, на отрезки, состоящие из (по часовой стрелке) x и $6-$ x, y и $6-y$, z и $6-z$ частей соответствующих сторон старого, x ,y, z -целые, от 1 до 5 .

Новый треугольник получен из старого удалением трех «угловых», площади которых равны $\frac{x(6-z)}{36}$, $\frac{y(6-x)}{36}$, $\frac{z(6-x)}{36}$ (по формуле для площади через пару сторон и угол). Заметим, что все три выражения линейны по x, так что сумма их будет минимальна при x = 1 или x = 5; то же верно и для y и z. Для x = y = z = 1, удаляемая площадь равна $\frac{15}{36}$, для 1, 1, 5 – равна $\frac{21}{36}$, остальные случаи – получаются перестановкой или переобозначениями. Значит, в случае б), наибольшая площадь нового будет равна $1-\frac{15}{36}=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$.

Но $\frac{7}{12}>\frac{5}{9}$….

Оценивание: Полное решение – 7 баллов. Не рассмотрен случай а) – снять 3 балла. Рассмотрен только случай а) – 2 балла.