

7 класс 1 день

1. Винни Пух проходит за 2,5 часа 10 км. За сколько минут он пройдёт 14 км?

Решение: Для начала узнаем скорость Винни Пуха. $V=S/t=10/2,5=4\text{км/ч}$. Выражая из стандартной формулы время, получим $t=S/V=14/4=3,5\text{ч}$. В задаче спрашивается за сколько МИНУТ, поэтому $3,5*60=210\text{мин}$.

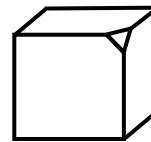
Ответ: 210

2. Оля и Толя в записи 31** вместо звездочек вставляли четные цифры (0,2,4,6,8) так, чтобы в итоге получилось число, делящееся на 6. Какое наибольшее число они могли получить?

Решение: Чтобы число делилось на 6, нужно чтобы оно делилось на 2 и на 3. Делимость на 2 означает, что последняя цифра должна быть чётная. Так как мы вставляем только чётные цифры, это ни на что не влияет. Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3. Для того, чтобы число было максимальным поставим на 3-е место цифру 8, тогда получим 318*. Сумма цифр $3+1+8=12$. На последнее место нужно выбрать такую цифру, чтобы число делилось на 3. Так как нас просят найти наибольшее, то возьмём наибольшее из предложенных цифр: 3188, но сумма его цифр $3+1+8+8=20$ – не делится на 3. Возьмём следующее по величине число: 3186, сумма его цифр $3+1+8+6=18$ – делится на 3.

Ответ: 3186

3. Если отпиливать от деревянного куба маленький кусочек около одной вершины, то получится тело, изображенное на рисунке. Отпилим такие же кусочки около ещё 5 вершин (то есть всего от 6). Сколько получится вершин?



Решение: Заметим, что отпиливание кусочка убирает одну вершину, но добавляет 3, то есть количество вершин увеличивается на 2. Изначально у нас 8 вершин. Мы отпиливаем 6 кусочков, то есть добавляем $6*2=12$ вершин. Всего $8+12=20$.

Ответ: 20

4. Известно, что $XX + X = ИКС$. На какую цифру оканчивается произведение: П·А·Р·А·Б·О·Л·А (разными буквами обозначены разные цифры, одинаковыми – одинаковые)?

Решение: Так как к двузначному числу XX прибавили однозначное число X и получили трёхзначное, то $X = 9$, а $ИКС = 108$. Уже использованы 4 цифры. В произведении П·А·Р·А·Б·О·Л·А использованы 6 других цифр. Следовательно, среди них обязательно есть цифры 2 и 5, значит, это произведение оканчивается на 0.

Ответ: 0

- 5.

Павел очень хотел получить в подарок наушники apple airpods 2, поэтому активно следил за изменением их цены. Сначала стоимость уменьшилась на 700 рублей. Затем стоимость уменьшилась еще на 8 процентов. Потом снова уменьшилась, но уже на 10 процентов. Итого после трех изменений цена наушников составила 12420 рублей. Какова первоначальная цена apple airpods 2?

Решение: Пусть изначально цена наушников X . После снижения цены на 10% они стали стоить 12420, считаем сколько они стоили до понижения. Применим стандартный метод пропорции: 12420руб – 90% стоимости, X руб – 100%, откуда следует, что до последнего понижения наушники стоили 13800 рублей. Аналогично поступим с понижением на 8%. Тогда 13800руб – 92%, X руб –

100%, следовательно, до второго понижения наушники стоили 15000 рублей. Осталось прибавить 700 рублей.

Ответ: 15700

6. Седьмого августа текущего года была замечательная дата – в записи 7.8.2019 (без первых нулей в числе и месяце) все цифры различны. Когда следующая замечательная дата? Ответ запишите БЕЗ точек, числом, например если дата 23 сентября 2025 года, то следует записать 2392025 (обращаем Ваше внимание на то, что запись даты НЕ должна содержать первых нулей в числе и месяце!)
Решение: Решим задачу методом «умного» перебора. Для начала заметим, что в 2019 году такой даты уже точно не будет. Действительно, 8 месяц может стать 9,10,11,12 – все цифры присутствуют в 2019.
7 число может стать любым от 8 до 31, но также все цифры будут присутствовать в 2019. Тогда поймём какой год следующим может подойти. Очевидно, что это 2031 год, до этого будут повторы. У нас остались свободными цифры 4,5,6,7,8,9. Необходима ближайшая дата, значит месяц должен быть минимальным, то есть 4. Тогда, очевидно, подойдёт 5 число. Ответом будет 5 число 4 месяца 2031 года.

Ответ: 542031

7. У Вити 20 знакомых (не обязательно друзей). Известно, что среди знакомых Вити не найдется никаких двух с одинаковым числом друзей. Сколько друзей у Вити?
Решение: Для 20 знакомых Вити есть 21 вариант числа друзей: от 0 до 20. Но, если кто-то дружит со всеми, то у всех не меньше одного друга. Поэтому либо есть такой, кто дружит со всеми, либо есть такой, кто не дружит ни с кем. В обоих случаях остается 20 вариантов: либо от 1 до 20, либо от 0 до 19. Самый дружелюбный дружит с Петей, а самый недружелюбный – нет. После перевода этих двоих в другой класс у оставшихся одноклассников будет разное число друзей. Повторяя эти рассуждения 10 раз, переведем в другой класс 10 пар, в каждой из которых один Витин друг. Итак, друзей у Вити 10.

Ответ: 10

8. Сколько существует восьмизначных чисел, у которых 4 четные и 4 нечетные цифры (число с «0» начинаться не может)?

Решение: Заметим, что необходимо рассмотреть 2 случая: число начинается с четной цифры и число начинается с нечетной цифры.

1. Число начинается с четной цифры. На первом месте может быть 4 варианта цифр (2,4,6,8), так как на 0 начинаться нельзя. На втором месте в числе может стоять как четная, так и нечетная цифра. Но заметим, что нечетных и четных цифр поровну (1,3,5,7,9 и 0,2,4,6,8). Из этого следует, что на втором, третьем, ... , восьмом местах мы можем поставить цифру 5 способами. То есть всего. $4 \cdot 5^5$. Но в этом произведение не учтен выбор мест для четных и нечетных чисел. Всего мест 7 из них нужно выбрать 3 места для четных чисел (остальные 4 автоматически займут нечетные). Поэтому нужно умножить на $7 \cdot 6 \cdot 5$, но разделить на $3 \cdot 2 \cdot 1$, так как порядок выбора НЕ важен.

Итого, если на первом месте стоит четная цифра, то всего вариантов $4 \cdot 5^7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 : (3 \cdot 2 \cdot 1)$. Или $4 \cdot 5^7 \cdot C_7^4$ (здесь последний множитель как раз и обозначает число вариантов выбрать 3 места из 7, если порядок выбора не важен).

2. Аналогично рассматривается вариант, где на первом месте нечетная цифра, за исключением того, что на первом месте могут быть 5 вариантов (1,3,5,7,9). Тогда число вариантов - $5^8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 : (3 \cdot 2 \cdot 1)$. Или $5^8 \cdot C_7^4$. Нетрудно посчитать, что это 24609375.

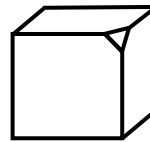
Ответ: 24609375

7 класс 2 день

1. Рысь пробегает 250 метров за 30 секунд. За сколько минут рысь пробежит 625 метров?
Решение: Для начала узнаем скорость рыси. Чтобы не переводить ответ из одних единиц измерения в другие, сделаем это сейчас, 30 секунд переведем в минуты: $30/60=0,5$ мин. Тогда $V=S/t=250/0,5=500$ м/мин. Выражая из стандартной формулы время, получим $t=S/V=625/500=1,25$ мин.
Ответ: 1,25

2. Поля и Коля в записи 31** вместо звездочек вставляли цифры так, чтобы в итоге получилось число, делящееся на 45. Какое наибольшее число они могли получить?
Решение: Чтобы число делилось на 45, нужно чтобы оно делилось на 5 и на 9. Делимость на 9 означает, что сумма цифр делится на 9. Так как нам необходимо число наибольшее, то поставим на место первой (слева) звездочки цифру 9, получим 319*. Делимость на 5 означает, что на последнем месте в числе может стоять 0 или 5. Поставим 5, получим 3195. Осталось убедиться, что оно делится на 9. Действительно, $3+1+9+5=18$ – делится на 9.
Ответ: 3195

3. Если отпиливать от деревянного куба маленький кусочек около одной вершины, то получится тело, изображенное на рисунке. Отпилим такие же кусочки около ещё 4 вершин (то есть всего от 5). Сколько получится ребер?



Решение: Заметим, что отпиливание кусочка добавляет 3 ребра. Изначально у нас 12 ребер. Отпиливание 5 кусочков даёт ещё $5*3=15$ ребер. Всегда $12+15=27$.

Ответ: 27

4. Пятого октября текущего года была замечательная дата – в записи 5.10.2019 (без первых нулей в числе и месяце) одна из цифр записи равна сумме всех остальных ($9=1+5+2+0+1$). Когда следующая замечательная дата? Ответ запишите БЕЗ точек, числом, например если дата 23 сентября 2025 года, то следует записать 2392025 (обращаем Ваше внимание на то, что запись даты НЕ должна содержать первых нулей в числе и месяце!)

Решение: Следующая замечательная дата будет все еще в октябре. Это 14.10.2019, так как $9=1+4+1+0+2+0+1$.

Ответ: 14102019

5. Максим очень хотел получить в подарок часы apple watch, поэтому активно следил за изменением их цены. Сначала стоимость уменьшилась на 10 процентов. Затем стоимость уменьшилась еще на 600 рублей. Потом снова уменьшилась, но уже на 15 процентов. Итого после трех изменений цена часов составила 25500 рублей. Какова первоначальная цена apple watch?

Решение: Пусть изначальная цена часов X . После снижения цены на 15% они стали стоить 25500, посчитаем сколько они стоили до понижения. Применим стандартный метод пропорции: 25500 руб – 85% стоимости, X руб – 100%, откуда следует, что до последнего понижения наушники стоили 30000 рублей. Повышаем цену на 600, получим 30600. Аналогично поступим с понижением на 10%. Тогда 30600 руб – 90%, X руб – 100%, следовательно, до второго понижения наушники стоили 34000 рублей.

Ответ: 34000

6. Учительница написала на доске верное равенство. Вася заменил некоторые цифры нулем. Пример стал выглядеть так: $(00 + 00 + 1) \times 0 = 000$. Какую цифру надо поставить вместо нулей (вместо каждого нуля одну и ту же цифру) чтобы равенство снова стало верным?

Решение: Заменим нули буквой: $(XX + XX + 1) \times X = XXX$. Разделив на X , получим $XX + XX + 1 = 111$, откуда $XX = (111 - 1) : 2 = 55$.

Ответ: 5

7. Аня, Маша, Таня и Даша пели песни под гитару. Каждый раз одна из них играет на гитаре, остальные три поют. Известно, что Аня спела больше всех песен – одиннадцать, а Даша меньше всех – восемь. Какое количество песен исполнили девочки?

Решение: Каждую песню спели три девочки, значит если сложить количество песен, спетых каждой девочкой, результат будет делиться на 3. Аня и Даша вместе спели 19 песен. Таня и Маша спели вместе от 18 до 20 песен (9 и 9, 9 и 10, 10 и 9, 10 и 10). То есть вместе они спели минимум 37 песен, но 37 на 3 не делится. Ближайшее возможное количество песен, делящееся на 3, это 39 песен. Тогда девочки спели вместе $39/3=13$ песен.

Ответ: 13

8. Петя расставляет в ряд 10 различных цифр (0,1,2,...,9) так, чтобы получилось число у которого цифра 0 стоит между цифрами 3 и 1 (между цифрами 3 и 0 и между цифрами 0 и 1 могут быть еще цифры, например расстановка 4532097681 подходит, также подходит расстановка 2107563948). Сколько ВСЕГО таких расстановок, если каждую цифру в каждом числе можно использовать ровно один раз и число не может начинаться с нуля?

Решение: Всего 10-значных наборов у которых все цифры разные $10!$, так как на первом месте может быть одна из 10 цифр, на втором – любая из 9 оставшихся, на третьем - любая из 8 оставшихся и так далее. Заметим, что перестановок на числах 1,0,3 – 6 штук (или 3!). В нашем случае $(*1*0*3*), (*1*3*0*), (*3*0*1*), (*3*1*0*), (*0*1*3*), (*0*3*1*)$, где вместо * может быть любое количество цифр, в том числе и ни одной, но всего в каждой комбинации 10 различных цифр. Из них подходят только два типа: $(*1*0*3*)$ и $(*3*0*1*)$, то есть треть от общего количества. Заметим, что перестановки у которых на первом месте 0 заведомо не подходят, а значит чисел начинающихся на 0, не удовлетворяющих условиям задачи быть не может. Таким образом, ответ $10!/3$ – количество всех наборов удовлетворяющих условиям задачи.

Ответ: 1209600