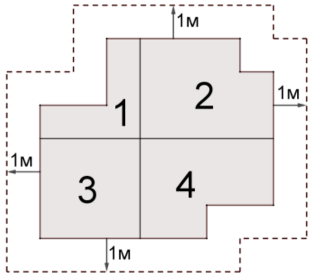
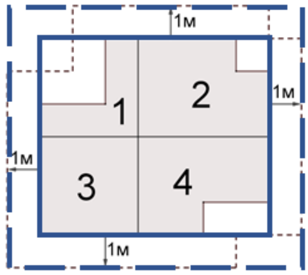
ИМ по математике. Заключительный тур. 6 класс. Решения.

1. В зоопарке решили обновить забор к вольеру, вольер показан на рисунке. Какой длины нужно купить сетку, чтобы обтянуть забор по периметру (пунктирная линия), если известно, что периметр 1 вольера 15 м, периметр 4 – 23 м, а расстояние на прямых участках от вольера до забора 1 метр.



Ответ: 46 метров.

Решение: заметим, что периметр исходного вольера и периметр забора равен периметру соответственных прямоугольников, изображенных на картинке. Периметры 1 и 4 вольера в сумме дают периметр прямоугольника 15+23 = 38 . Периметр забора на 8 метров больше периметра вольера, поэтому необходимо купить сетку длиной 38+8=46 м.



Критерии:
приведен факт, что периметр фигуры равен периметру прямоугольника с «вывернутыми» углами – 1 балл
приведен факт, что к периметру фигуры нужно прибавить периметр четырех уголков по 2 м – 1 балл
обоснованно получен периметр фигуры 38 м – 3 балла
обоснованно получен периметр фигуры 38 м, но к нему ошибочно прибавлено 1 м (вместо 2) 4 раза – 5 баллов

2. Сколько решений имеет ребус К×У×(Б+О+К) =22 (каждая буква означает цифру, причем разные буквы – разные цифры)?

Ответ: 10.

Решение: число 22 можно разложить на произведение трех множителей ровно одним способом: 22 = 1*2*11. Т.к. каждая буква означает цифру, то К и У могут быть равны только 1 или 2. Тогда Б + О + К = 11. Если К = 1, то Б + О = 10. Число 10 в виде двух суммы двух разных однозначных чисел можно представить 4 способами: (1 + 9), (2 + 8), (3 + 7), (4 + 6). Т.к. разные буквы означают разные цифры, и цифры 1 и 2 уже использованы, то подходит только два варианта (3 + 7), (4 + 6), каждый из которых дает по 2 решения, т.е. 2*2=4 решения. Если К = 2, то Б + О = 9. Число 9 в виде двух суммы двух разных однозначных чисел можно представить 5 способами: (0 + 9), (1 + 8), (2 + 7), (3 + 6), (4 + 5). Т.к. разные буквы означают разные цифры, и цифры 1 и 2 уже использованы, то подходят три варианта (0 + 9), (3 + 6), (4 + 5), каждый из которых дает по 2 решения, т.е. 2*3=6 решений. Получаем, что всего 4+6=10 решений имеет ребус.

Критерии: -1 балл, если нет объяснения, почему Б + О + К = 11.
Если забыли про 0, то 4 балла.

3. Кот Матроскин на велосипеде догоняет Шарика, который едет на самокате. Скорость Шарика составляет 75% скорости кота Матроскина. Через 20 минут расстояние между ними уменьшилось с 900м до 300м. Найдите скорости Шарика и кота Матроскина.

__Ответ:__ 5,4 км/ч, 7,2 км/ч.

__Решение:__ Если за 20 минут расстояние уменьшилось на 600 м (900 – 300), то за 1 час оно уменьшилось на 1800 м, и тогда 1800 м/ч или 1,8 км/ч – скорость сближения. Скорость сближения составляет 25% (100 – 75) скорости кота Матроскина и его скорость равна 1,8:0,25=7,2 км/ч. Скорость Шарика 7,2•0,75=5,4 км/ч.

Критерии:

если километры не переведены в метры и дан неверный ответ при верном решении – 3 балла

если километры не переведены в метры и дан верный ответ при верном решении – 6 баллов

4. Колонна из шестиклассников идёт на экскурсию в зоопарк. В колонне 101 ряд, и в каждом ряду по три человека. Сопровождающий шестиклассников знает, что если у кого-нибудь из мальчиков справа, слева, спереди и сзади стоят мальчики (среди четырёх соседей нет ни одной девочки), то они подерутся. Какое наибольшее количество мальчиков может идти в этой колонне, чтобы никто не подрался, если ряды идут друг за другом?

__Ответ:__ 22.

__Решение__

Оценка: Заметим, что в любом квадрате 3х3 должна быть хотя бы одна девочка. В сто одном ряду содержится 33 непересекающихся квадрата 3х3 и еще два ряда, значит девочек должно быть не меньше 33, а мальчиков не больше, чем 3*101-33=270.

Пример: Поставим в середину каждого третьего ряда девочку, а на все оставшиеся места мальчиков.

Критерии:

Пример – 3 балла

Оценка – 3 балла

5. На острове живет племя рыцарей, которые всегда говорят правду и племя лжецов, которые всегда лгут. Как-то раз 2023 островитянина встали в круг и каждый из них сказал: "Оба моих соседа - лжецы". Затем один из них ушел, и круг образовали 2022 островитянина (возможно в другом порядке) и каждый из них сказал: "Оба моих соседа не из моего племени". Кем является ушедший островитянин, рыцарем или лжецом?

__Ответ:__ рыцарем.

__Решение:__ Для удобства обозначим рыцарей буквой Р, а лжецов буквой Л.

Проанализируем первое высказывание. «Оба моих соседа - лжецы» мог сказать рыцарь в комбинации ЛРЛ и лжец в комбинациях РЛР, РЛЛ, ЛЛР. Заметим, что в каждой тройке не менее одного рыцаря. Тогда всего изначально было не менее 674 рыцарей (2023=674*3+1),

так как можно взять 674 подряд идущих непересекающихся тройки. Второе высказывание «Оба моих соседа не из моего племени» мог сказать рыцарь в комбинации ЛРЛ и лжец в комбинациях РЛЛ, ЛЛР и ЛЛЛ. В каждой тройке не более одного рыцаря. Тогда среди оставшихся 2022 островитян не более 674 рыцарей.
Однако, все эти рассуждения не дают однозначного ответа на вопрос задачи. Ведь мы показали, что изначально было не менее 674 рыцарей (674, 675, …), а стало не более 674 (674, 673, …). Наша оценка оказалось слабой для решения задачи.
Проанализируем первое высказывание по-другому. Рассмотрим подробнее «соседства» (промежутки между двумя соседями). Всего «соседств» в круге из 2023 аборигенов 2023. У каждого рыцаря оба соседа – лжецы. Значит число «соседств» между рыцарем и лжецом (x) равно удвоенному числу рыцарей (y), то есть $x=2y$. С другой стороны, рядом со лжецом стоит не менее одного рыцаря.
Получается, что число «соседств» между рыцарем и лжецом (x) не меньше количества лжецов (z), то есть $x \geq z$. Итого из равенства $x=2y$ и неравенства $x \geq z$ получаем $2y \geq z$, то есть число лжецов не превосходит удвоенного числа рыцарей. Равенства быть не могло, так как 2023 не делится на 3. Значит первоначально было не менее 675 рыцарей, а после ухода одного из островитян рыцарей стало не более 674. Значит ушедший абориген – рыцарь.
Так как мы доказали, что ушедшим мог быть ТОЛЬКО рыцарь, а действие по условию точно произошло, то приводить пример подтверждающий точность предыдущих оценок нет необходимости. Однако мы сделаем это, показав тем самым корректность условия.
Итак, изначально было 2023 островитянина, 675 из которых - рыцари, остальные 1348 – лжецы. Расставим 2019:3=673 тройки ЛРЛ по кругу, оставшиеся 4 места расставим ЛРЛР. После того, как один из рыцарей ушел, оставшиеся 2022 островитянина встают тройками ЛРЛ (всего будет 674 таких тройки). Легко убедиться, что в обеих расстановках рыцари говорят правду, а лжецы лгут.

Критерии:
доказано, что изначально рыцарей было не менее 674 – 2 балла
доказано, что изначально рыцарей было не менее 675 – 3 балла
доказано, что после выхода одного островитянина, рыцарей было не более 674 – 3 балла