Школьный этап олимпиады по математике

Октябрь 2018 г.

10 класс

2 блок

1. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_8, a_9$ — арифметическая прогрессия. Найдите сумму её членов, если $a_4 + a_6 = 20$.

Ответ: 90.

Решение. $a_1 + a_9 = a_2 + a_8 = a_3 + a_7 = a_4 + a_6 = 2a_5$.

2. Уравнение $x^2 + b_1x + c = 0$ имеет корни 3 и 7, а уравнение $x^2 + bx + c_1 = 0$ имеет корни 2 и 9. Найдите сумму кубов корней уравнения $x^2 + bx + c = 0$.

Ответ: 638.

Решение. Применив теорему Виета к первым двум уравнениям, получим

$$c = 3 \cdot 7 = 21, \quad b = -(2+9) = -11,$$

откуда для корней третьего уравнения имеем

$$x_1 + x_2 = 11; \quad x_1 \cdot x_2 = 21.$$

Из равенства $(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2)$ находим

$$x_1^3 + x_2^3 = 11^3 - 3 \cdot 21 \cdot 11 = 638.$$

3. Пусть $x + \frac{1}{y} = -\frac{1}{5}; \quad y + \frac{1}{z} = -1; \quad z + \frac{1}{x} = 4$. Вычислите xyz.

Ответ: -1.

Решение. Если из второго и третьего уравнения выразить x и y через z, то после подстановки соответствующих выражений в первое уравнение получим $4z^2 - 12z + 9 = 0$, откуда $z = \frac{5}{3}$. Дальнейшее понятно.

4. На сторонах AB, BC и CD и DA равнобедренной трапеции $ABCD$ отмечены соответственно точки A_1, B_1, C_1, D_1. Известно, что

$$\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{BB_1}{B_1C} = \frac{CC_1}{C_1D} = \frac{DD_1}{D_1A} = 4, \quad \angle A = \angle D = 75^\circ, \quad \angle B = \angle C = 105^\circ.$$

Найдите (в кв. см) площадь четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$, если площадь трапеции $ABCD$ равна 50 кв. см.

Ответ: 34.

Решение. Нетрудно видеть, что $S_{AA_1D_1} = \frac{4}{25}S_{ABD}$, $S_{CC_1B_1} = \frac{4}{25}S_{BCD}$. Отсюда $S_{AA_1D_1} + S_{CC_1B_1} = \frac{4}{25}S_{ABCD}$. Аналогично, $S_{BB_1A_1} + S_{DD_1C_1} = \frac{4}{25}S_{ABCD}$. Следовательно, $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{17}{25}S_{ABCD} = 34$.

5. Найдите наибольшее значение выражения $x + y$, если

$$x^2 + y^2 + 4x - 4y - 24 = 0.$$

Ответ: 8.

Решение. Выделим полные квадраты по обеим переменным:

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 32.$$

Это уравнение окружности с центром в точке $C(-2; 2)$. Нужно найти максимальное a, при котором прямая $y + x = a$ имеет хотя бы одну общую точку с данной окружностью. Это значение соответствует касательной к окружности, перпендикулярной к биссектрисе 1-й четверти.

6. Найдите 3-ю с конца цифру в десятичной записи числа $\dfrac{218}{2^{218}}$.

Ответ: 6.

Решение. Представим наше число в виде $\dfrac{109}{2^{217}} = \dfrac{109 \cdot 5^{217}}{10^{217}}$. Теперь видно, что после запятой в этом числе 217 цифр. Поэтому задача сводится к нахождению третьей с конца цифры числа $109 \cdot 5^{2017}$. Рассмотрим последовательность, составленную из последних трёх цифр степеней пятёрки:

$$5, 25, 125, 625, 125, 625, 125, \ldots.$$

Начиная с 3-го члена эта последовательность периодическая, длина периода 2. Отсюда получаем, что последние три цифры числа 5^{217} есть 125. После умножения на 109 получим, что последние три цифры нашего числа 625.

7. По кругу стоят 15 человек. Каждому из них в руки дают флажок одного из цветов радуги. Сколько вариантов распределения флажков, в которых цвета каких-то 7 соседних флажков идут по часовой стрелке в правильном порядке (т. е. как в радуге)?

Ответ: 86471910.

Решение. Радуга может начинаться с любого из 15 мест. Оставшиеся 8 мест заполняются произвольно, число способов сделать это 7^8. Подсчитаем число комбинаций, содержащих по две радуги. Место единственного флажка, не входящего в эти радуги, выбирается 15 способами, а его цвет 7 способами — всего $15 \cdot 7 = 105$ вариантов. Стало быть, всего комбинаций 15 флажков, содержащих радугу, равно $15 \cdot 7^8 - 105 = 86\,471\,910$.

8. В ряд выписаны в некотором порядке числа от 1 до 100. Каково наибольшее число троек рядом стоящих чисел, сумма которых нечётна?

Ответ: 97.

Решение. Всего имеется 98 троек рядом стоящих чисел. Если сумма чисел в каждой тройке нечётна, то одинаковой чётности должны быть числа, стоящие а) на местах с номерами 1, 4, 7, …, 100 (таких чисел 34), б) на местах с номерами 2, 5, 8, …, 98 (здесь 33 числа); в) на местах с номерами 3, 6, 9, …, 99 (также 33 числа). Поскольку у нас по 50 чётных и нечётных чисел, указанная ситуация невозможна.

Вот пример на 97 троек: ставим 25 нечётных чисел, а затем 25 троек, в которых за нечётным числом идёт два чётных. Здесь единственной тройкой с чётной суммой будет тройка чисел, стоящих на 25–27 местах.