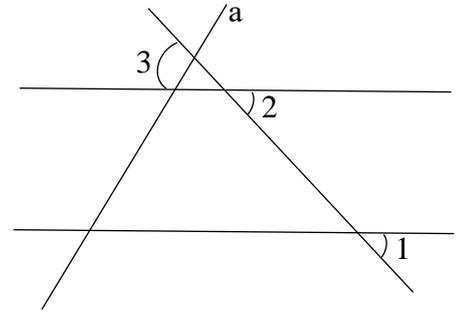


1 ТУР.

1 **Ответ: 60. (2 б)**

Прямые параллельны, так как вертикальный угол к углу в 40 градусов и другой угол в 40 градусов, изображенный на рисунке – соответственные.

Рассмотрим углы 1, 2, 3. $\angle 1 = \angle 2$ как соответственный, $\angle 2 = \angle 3$, как вертикальный. $X = 60^\circ$. Из-за секущей «а» может показаться, что неясно какой угол нужно рассматривать. Мысленно удалив секущую «а» всё становится понятно.



2. **Ответ: 16. (2 б)**

Система имеет решение (3; 4) – это означает, что при подстановке этих значений в уравнение получатся верные тождества, т.е.

$$\begin{cases} 3 \cdot 2a - 4 \cdot b = 46, \\ -4 \cdot a + 2 \cdot 3 \cdot b = -14. \end{cases}$$

Решив данную систему относительно (a, b) получим $a=11$, $b=5$. $a+b=16$.

3. **Ответ: -22. (2 б)**

Фразу «наибольшее целое не превосходящее» нужно понимать так: найти наибольшее целое число меньше или равное исходному. Ближайшим целым числом меньше -21,734 является число -22. Число -21 не подходит, так как оно БОЛЬШЕ исходного, а это противоречит определению.

4. **Ответ: 157464. (3 б)**

Первому игроку мы можем раздать любую из 36 карт. Второму любую из 27, так как карту какой бы масти мы не отдали первому, их всего 9. Третьему игроку одну из 18. Четвертому – одну из 9 оставшихся. Итого способов $36 \cdot 27 \cdot 18 \cdot 9 = 157464$

5. **Ответ: 1. (3 б)**

Запишем уравнения, удовлетворяющие условию (будем считать, что $x < y$):

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 6; \\ (x - 2)^2 - (y - 2)^2 = 18. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим следующие значения $x=-2,5$, $y=0,5$. $x+y=-2$.

Заметим, что при определенном выборе x , y (таких, что $x > y$) могло случиться так, что число $(x - 2)^2$ стало меньше числа $(y - 2)^2$ и тогда системы будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 6; \\ (y - 2)^2 - (x - 2)^2 = 18. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим следующие значения $x=3,5$, $y=-2,5$. $x+y=1$. Не трудно убедиться, что для данных чисел и правда произойдет изменение системы уравнений.

Таким образом наибольшее значение $x+y=1$.

6. Ответ: 0. (3 б)

Разложим уравнение $2x^2 - 5xy + 3y^2 - 5 = 0$ на множители, получим $(x - y)(2x - 3y) = 5$. Число 5 в виде произведения двух чисел можно получить только двумя способами $5 = 5 \cdot 1$ или $5 = (-5) \cdot (-1)$. Решив 4 системы уравнений получим необходимое.

$$1) \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y = 5 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x - y = -5 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

Решения: 1) (-2, -3); 2) (14, 9); 3) (2, 3); 4) (-14, -9).

Итого $-2+(-3)+2+3+14+9+(-14)+(-9)=0$.

7. Ответ: 9. (3 б)

Обозначим медиану AM , биссектрису BK . $BK \perp AM$ и пересекает ее в т.Н. BH является высотой $\triangle ABM$. Высота и биссектриса совпадают \Rightarrow треугольник ABM равнобедренный, $BM=AB$. Длины сторон треугольника ABC — последовательные целые числа (дано). Примем сторону $AB=x$, $AC=x+1$, $BC=x+2$. Тогда $CM=x+2-x=2$. Т.к. AM медиана, то $BM=CM=2$, следовательно, $BC=4$, $AB=BM=2$, $AC=2+1=3$. Предположим, что большей является сторона AC . Тогда $AB=1$, $BC=2$, $AC=3$; это противоречит теореме о неравенстве треугольника ($3=1+2$). Следовательно, $AB=2$, $AC=3$, $BC=4$. Периметр $ABC=2+3+4=9$ (ед. длины)

8. Ответ: 6. (4 б)

Если Вася первым ходом возьмет 7 яблок, то Петя, чтобы сразу не проиграть, возьмет из оставшихся 8 яблок 4. Вася не может взять оставшиеся 4 яблока, потому что Петя только что взял 4. Чтобы не проиграть на этом ходу, он берет 2 яблока. Пете остается взять 1 яблоко из оставшихся двух, и у Васи нет хода — он проиграл! Итак, 7 — плохое начало. Попутно мы выяснили, что если игроку достались 8 яблок и перед этим не было хода 4, то он выиграл. Если же перед этим был ход 4, то он, очевидно, проиграл. Значит, если игроку достались 12 яблок, то, беря 4, он ставит соперника в проигрышное положение. Итак, 12 яблок — выигрыш. Значит, Васе не нужно начинать игру с хода 3 — он предоставит выигрыш сопернику. Ясно также, что игрок, получивший 9 яблок, проиграл: после хода 1 он предоставляет сопернику выигрышную позицию 8, а после любого другого хода проигрывает немедленно. Значит, если Вася начинает с хода 6, то он поставит соперника в проигрышную ситуацию 9. Значит, 6 — верный ответ.

Мы выяснили, что 7 и 3 не подходят. Покажем, что не годятся и остальные возможные первые ходы: 5, 4, 2 и 1. Действительно, отвечая на каждый такой первый ход соответственно ходом 1, 2, 4 и 5, Петя ставит Васю в проигрышное положение 9.

2 ТУР.

1. Ответ: 30. (2 б)

Введем обозначения (см. рис).

$\angle GAF = \angle BAC = 60^\circ$ – вертикальные.

$\angle PBQ = \angle ABC = 80^\circ$ – вертикальные.

В треугольнике ABC известны два угла $\angle BAC, \angle ABC$,

тогда угол $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC =$

$$= 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ.$$

$\angle ACB = \angle DCE = 40^\circ$ – вертикальные.

$\angle RDE$ – развернутый, т.е. $\angle RDC + \angle CDE = 180^\circ$. По условию $\angle RDC = 70^\circ$, следовательно, $\angle CDE = 110^\circ$. В треугольнике CDE $\angle CDE = 110^\circ, \angle DCE = 40^\circ$.

$$\angle DEC = 180^\circ - \angle DCE - \angle CDE = 180^\circ - 40^\circ - 110^\circ = 30^\circ.$$

2. Ответ: 7. (2 б)

Система имеет решение (4; 7) – это означает, что при подстановке этих значений в уравнение получатся верные тождества, т.е.

$$\begin{cases} 4 \cdot 3a + 7 \cdot 7 \cdot b = 269, \\ 3 \cdot 4 \cdot b + 7 \cdot 7 \cdot a = 158. \end{cases}$$

Решив данную систему относительно (a, b) получим a=2, b=5. a+b=7.

3. Ответ: 1. (2 б)

Первое число - наибольшее целое число меньше X. Понятно, что это число -5, так как строго меньше. Второе число наименьшее целое число не меньше X, то есть число -4, так как допускается равенство. Следовательно, $(-5 - (-4))^2 = 1$

4. Ответ: 1260. (3 б)

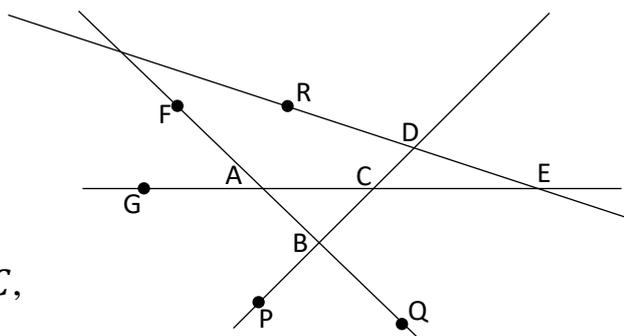
Наибольшее число проб – это количество всевозможных комбинаций. Цифр в коде 9. Всего перестановок 9!. Однако в коде повторяются 2 пятерки, 3 единицы и 4 тройки. Значит нужно разделить общее число перестановок на числа перестановок повторяющихся цифр. Таким образом, количество комбинаций равно $9!/(2!*3!*4!)=1260$

5. Ответ: -1. (3 б)

Преобразуем наше выражение следующим образом: $\frac{x}{y} + x = \frac{y}{x} + y \Leftrightarrow \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = -x - y$
 $-(x - y) \Leftrightarrow \frac{x^2 - y^2}{xy} = -(x - y) \Leftrightarrow \frac{(x-y)(x+y)}{xy} = -(x - y) \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -1$

6. Ответ: -36. (3 б)

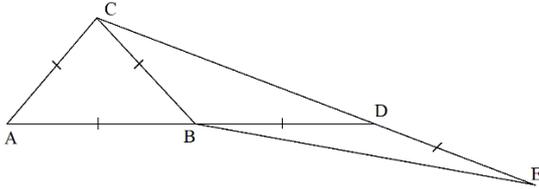
Вычтем из обеих частей уравнения число 3 и разложим левую часть на множители: $(y^2 - 1)(x + 3) = 105$. Следовательно, $y^2 - 1$ один из делителей 105, т.е. одно из чисел -1, 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105. Значит y^2 – одно из чисел 0, 2, 4, 6, 8, 16, 22, 36, 106.



Квадратами из этих восьми чисел являются только четыре: 0, 4, 16, 36. При этом второй множитель, т.е. $x + 3$, равен -105, 35, 7, 3 соответственно. Значит для $y = 0, x = -108; y = \pm 2, x = 32; y = \pm 4, x = 4; y = \pm 6, x = 0$. То есть решениями являются следующие пары: (0;-6), (0;6), (4;-4), (4;4), (32;-2), (32;2), (-108;0).

Итого: $0 - 108 + 2 - 2 + 32 + 4 - 4 + 4 + 6 - 6 + 0 = -36$.

7. Ответ: 15. (3 б)



Точка E расположена на прямой CD. Это становится очевидно, если провести окружность с центром в точке D и радиусом $AB = BD$. Эта окружность – множество всех точек плоскости, где может располагаться точка E, так как $DE = AB$. Треугольник ABC – равносторонний. Угол CBD равен 120 градусам. Треугольник CBD – равнобедренный, значит угол BDC равен 30 градусам. Угол BDE равен 150 градусам. Треугольник BDE также равнобедренный, отсюда искомый угол BED равен 15 градусам.

8. Ответ: 7. (4 б)

Почему нельзя взять 8 колб очевидно. Пример: оставим 8 с щелочью, 2 с хлоридом, 2 с бромидом (забрали 5 хлорида и 3 бромида). Получили противоречие.

Докажем, что 7 всегда можно. Расположим колбы в порядке убывания по количеству $a \leq b \leq c$. Предположим, что нам удалось и колб $c \leq 3$, но тогда либо $b = 4$ и $a = 3$, либо $b = 3$ и $a = 4$. Если же $c \geq 4$, тогда либо a , либо b будет по крайней мере 3. В обеих ситуациях получается, что найдется 4 колбы одного химиката и 3 другого.