Муниципальный этап областной олимпиады школьников по математике
2018–2019 учебный год

5 класс

1. На лужайке росли 250 одуванчиков (какие-то из них жёлтые, а остальные — белые). После того, как 10 белых одуванчиков облетели, а 20 жёлтых побелели, жёлтых одуванчиков стало втрое больше, чем белых. Сколько изначально было жёлтых одуванчиков?

Ответ: 200.

Решение. После того, как 10 белых одуванчиков облетели, осталось 240 одуванчиков. Из них четверть белые и три четверти жёлтые. Значит, стало 180 жёлтых одуванчиков, а вначале их было на 20 больше (поскольку ровно столько из них стали белыми).

Оценивание. За верное решение 7 баллов. Если есть только ответ (без обоснований), 2 балла.

2. Петя записал в ряд в каком-то порядке числа от 1 до 7. Вася сложил первое и второе число, второе и третье, ..., шестое и седьмое. Могло ли у него получиться 6 последовательных чисел?

Ответ: да.

Решение. Если Петя запишет 4, 1, 5, 2, 6, 3, 7, то у Васи получится 5, 6, 7, 8, 9, 10.

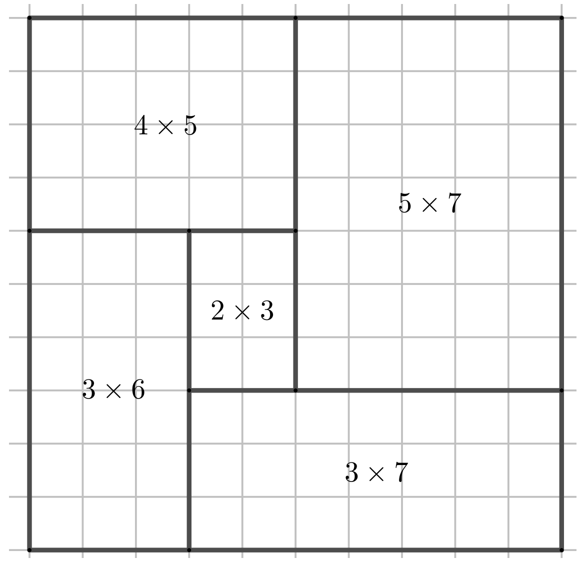
Оценивание. За верный пример 7 баллов. (Участники олимпиады не обязаны описывать, как пример получен.)

3. Можно ли сложить квадрат из пяти прямоугольников следующих размеров: 2×3, 3×6, 4×5, 3×7 и 5×7? (Прямоугольники можно размещать горизонтально или вертикально).

Ответ: да.

Решение. Пример приведён на рис.

Оценивание. За верный пример 7 баллов. (Участники олимпиады не обязаны описывать, как пример получен.) Если найден только размер искомого квадрата, 1 балл.



4. За круглым столом сидят 10 мальчиков и несколько девочек. Известно, что напротив каждого мальчика сидит девочка. Может ли случиться так, что никакие две девочки не сидят рядом?

Ответ: нет.

Решение. На каждого мальчика приходится своя девочка (сидящая напротив него). Значит, девочек не меньше мальчиков. Предположим, что никакие две девочки не сидят рядом.

Тогда не могут сидеть рядом и никакие два мальчика (иначе сидели бы рядом противоположные им девочки). Следовательно, за столом мальчики и девочки чередуются, и их по 10 человек. Но тогда напротив мальчика должен сидеть мальчик. Пришли к противоречию.

Оценивание. За верное решение 7 баллов.

5. По кругу стоят $k > 3$ натуральных чисел. Известно, что для любых трёх соседних чисел их сумма одна и та же, а сумма всех чисел равна 91. Найдите наименьшее возможное значение k.

Ответ: 7.

Решение. Пусть n — общее количество чисел по кругу, а s — сумма чисел в каждой тройке. Количество троек соседних чисел равно k, поскольку тройку можно начать с любого из k чисел. Просуммировав числа по всем тройкам, получим $ks = 3 \cdot 91$ (каждое из k чисел входит ровно в три тройки). Следовательно, число k является делителем числа $3 \cdot 91 = 3 \cdot 7 \cdot 13$. Так как $k > 3$, отсюда получаем, что $k \geqslant 7$. Если по кругу поставить 7 чисел, равных 13, то условие задачи будет выполнено. Поэтому 7 и есть наименьшее значение k.

Оценивание. Если есть только пример, 2 балла. Если только установлено, что числа повторяются через два, 2 балла. Если только доказано, что при k, не кратном 3, все числа равны друг другу, 3 балла. За полное решение 7 баллов.