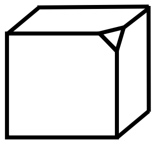
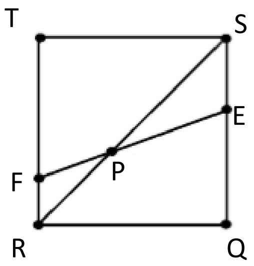
8 класс 1 день

1. Если отпиливать от деревянного куба маленький кусочек около одной вершины, то получится тело, изображенное на рисунке. Отпилим такие же кусочки около ещё 5 вершин (то есть всего от 6). Сколько получится вершин?



*<u>Решение:</u> Заметим, что отпиливание кусочка убирает одну вершину, но добавляет 3, то есть количество вершин увеличивается на 2. Изначально у нас 8 вершин. Мы отпиливаем 6 кусочков, то есть добавляем 6*2=12 вершин. Всего 8+12=20.*
<u>Ответ:</u> 20

2. Оля и Толя в записи 31** вместо звездочек вставляли четные цифры (0,2,4,6,8) так, чтобы в итоге получилось число, делящееся на 6. Какое наибольшее число они могли получить?
<u>Решение:</u> Чтобы число делилось на 6, нужно чтобы оно делилось на 2 и на 3. Делимость на 2 означает, что последняя цифра должна быть чётная. Так как мы вставляем только чётные цифры, это ни на что не влияет. Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3. Для того, чтобы число было максимальным поставим на 3-е место цифру 8, тогда получим 318. Сумма цифр 3+1+8=12. На последнее место нужно выбрать такую цифру, чтобы число делилось на 3. Так как нас просят найти наибольшее, то возьмём наибольшее из предложенных цифр: 3188, но сумма его цифр 3+1+8+8=20 – не делится на 3. Возьмём следующее по величине число: 3186, сумма его цифр 3+1+8+6=18 – делится на 3.*
<u>Ответ:</u> 3186



3. Чему равен угол ∠SPE, если ∠PFT=60° и RTSQ является квадратом?
<u>Решение:</u> Углы ∠PFT и ∠PFR являются смежными, т.е. ∠PFT+ ∠PFR=180. ∠PFR=180-60=120. ∠PRF=45, т.к. RS – диагональ квадрата и делит ∠TRQ пополам. ∠FPR=180-∠PFR-∠PRF=180-120-45=15. А ∠FPR вертикальный с ∠SPE
<u>Ответ:</u> 15

4. Известно, что прямые $2y + x - 1 = 0$ и $kx - 2y - 2b = 0$ перпендикулярны и пересекаются на оси абсцисс. Найти сумму k и b.
<u>Решение:</u> Выразим из первого уравнения y=(1-x)/2 – линейная функция. Данная функция пересекает ось абсцисс в точке (1,0). Подставим точку (1,0) во второе уравнение, получим k=2b. Из условия перпендикулярности двух линейных функций (произведение угловых коэффициентов равно -1) получим, что k=4, т.е. b=2, 4+2=6.
<u>Ответ:</u> 6

5. Решить уравнение: $(2x + y - 14)^2 + |x - 3y| = 0$. В ответ запишите сумму значений x и y.
<u>Решение:</u> Перенесем модуль вправо, тогда слева неотрицательная величина, а справа неположительная величина. $(2x + y - 14)^2 = -|x - 3y|$, такое уравнение умеет решение только если обе части равны нулю. Получим систему уравнений $2x + y - 14 = 0, x - 3y = 0$. Откуда, очевидно, x=6, y=2.
<u>Ответ:</u> 8

6. В равнобедренном треугольнике *ABC* угол *B* равен 30°, *AB* = *BC* = 6. Проведены высота *CD* треугольника *ABC* и высота *DE* треугольника *BDC*. Найдите *BE*.
<u>Решение:</u> DC = ½ BC = 3. Кроме того, ∠DCB = 90° – ∠DBC = 60°, значит ∠CDE = 30°, следовательно, CE = ½ DC = 1,5. Таким образом, BE = BC – CE = 4,5.
<u>Ответ:</u> 4,5

7. Толя задумал два простых числа. Затем к каждому из задуманных чисел прибавил по единице и перемножил полученные числа, оказалось, что их произведение на 31 больше произведения задуманных чисел. Какие числа задумал Толя. Укажите все возможные варианты. В ответе напишите сумму всех чисел. Например, если у Вас получилось, что Толя мог загадать 23 и 17 или 31 и 29, то в ответе нужно написать 100 (23+17+31+29=100)

<u>Решение:</u> Обозначим: a, b — простые числа, X — их произведение. Тогда переписывая условие задачи в наших обозначения получим систему уравнений $\begin{cases} ab = X \\ (a+1)(b+1) = X + 31 \end{cases}$*, раскроем скобки во втором уравнении, получим* $\begin{cases} ab = X \\ ab + a + b + 1 = X + 31 \end{cases}$*, вычтем из второго уравнения первое и получим равносильную систему* $\begin{cases} ab = X \\ a + b = 30 \end{cases}$*. Из уравнения $a + b = 30$ перебором найдём подходящие простые числа. Не трудно убедится, что это 7+23, 11+19, 13+17.*

<u>Ответ:</u> 90

8. Сколько существует восьмизначных чисел, у которых 4 четные и 4 нечетные цифры (число с «0» начинаться не может)?

<u>Решение:</u> Заметим, что необходимо рассмотреть 2 случая: число начинается с четной цифры и число начинается с нечетной цифры.

*1. Число начинается с четной цифры. На первом месте может быть 4 варианта цифр (2,4,6,8), так как на 0 начинаться нельзя. На втором месте в числе может стоять как четная, так и нечетная цифра. Но заметим, что нечетных и четных цифр поровну (1,3,5,7,9 и 0,2,4,6,8). Из этого следует, что на втором, третьем, … , восьмом местах мы может поставить цифру 5 способами. То есть всего. 4*5*5*5*5*5*5*5. Но в этом произведение не учтен выбор мест для четных и нечетных чисел. Всего мест 7 из них нужно выбрать 3 места для четных чисел (остальные 4 автоматически займут нечетные). Поэтому нужно умножить на 7*6*5, но разделить на 3*2*1, так как порядок выбора НЕ важен.*

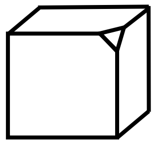
Итого, если на первом месте стоит четная цифра, то всего вариантов $4 * 5^7 * 7 * 6 * 5 : (3 * 2 * 1)$. Или $4 * 5^7 * C_7^4$ (здесь последний множитель как раз и обозначает число вариантов выбрать 3 места из 7, если порядок выбора не важен).

2. Аналогично рассматривается вариант, где на первом месте нечетная цифра, за исключением того, что на первом месте могут быть 5 вариантов (1,3,5,7,9). Тогда число вариантов -
$5^8 * 7 * 6 * 5 : (3 * 2 * 1)$ *. Или $5^8 * C_7^4$. Нетрудно посчитать, что это 24609375.*

<u>Ответ:</u> 24609375

8 класс 2 день

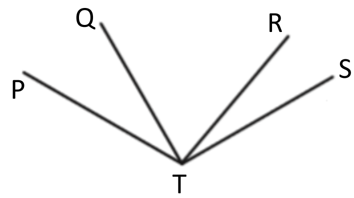
1. Если отпиливать от деревянного куба маленький кусочек около одной вершины, то получится тело, изображенное на рисунке. Отпилим такие же кусочки около ещё 4 вершин (то есть всего от 5). Сколько получится ребер?



<u>*Решение:*</u> *Заметим, что отпиливание кусочка добавляет 3 ребра. Изначально у нас 12 ребер. Отпиливание 5 кусочков даёт ещё 5*3=15 ребер. Всегда 12+15=27.*
<u>*Ответ:*</u> *27*

2. Поля и Коля в записи 31** вместо звездочек вставляли цифры так, чтобы в итоге получилось число, делящееся на 45. Какое наибольшее число они могли получить?
<u>*Решение:*</u> *Чтобы число делилось на 45, нужно чтобы оно делилось на 5 и на 9. Делимость на 9 означает, что сумма цифр делится на 9. Так как нам необходимо число наибольшее, то поставим на место первой (слева) звездочки цифру 9, получим 319*. Делимость на 5 означает, что на последнем месте в числе может стоять 0 или 5. Поставим 5, получим 3195. Осталось убедиться, что оно делится на 9. Действительно, 3+1+9+5=18 – делится на 9.*
<u>*Ответ:*</u> *3195*

3. На рисунке ∠PTS=120°, ∠QTS=3∠PTQ и ∠PTR=2∠RTS. Найдите величину угла QTR.
<u>*Решение:*</u> *Из равенства ∠QTS=3∠PTQ следует, что 4∠PTQ=120°, следовательно, ∠PTQ =30°. Из равенства ∠PTR=2∠RTS следует, что 3∠RTS=120°, следовательно, ∠RTS=40°. ∠PTS=∠PTQ+ ∠QTR+∠RTS=120°. Значит, ∠QTR=50°.*
<u>*Ответ:*</u> *50*



4. Известно, что графики функций $ax - 2y - 4a + 2 = 0$ и $3y + ax + 3 = 0$ пересекаются на оси ординат. Найти значение a.
<u>*Решение:*</u> *Из уравнения* $3y + ax + 3 = 0$ *выразим* $y = \frac{-3-ax}{3}$. *Эта прямая проходит через точку (0,-1). Так как графики этих функций пересекаются на оси ординат, то* $ax - 2y - 4a + 2 = 0$ *проходит через ту же точку. Подставим,* $-2 * (-1) - 4a = 0$, *откуда a=1.*
<u>*Ответ:*</u> *1*

5. Решить уравнение: $x^2 + 4y^2 + |x + 3y + 5| = 4xy$. В ответ запишите сумму значений x и y.
<u>*Решение:*</u> *Перенесем 4xy влево, а модуль вправо, и заметим, что слева будет полный квадрат.* $(x - 2y)^2 = -|x + 3y + 5|$. *У такого уравнения есть решение только в том случае, если обе части равны 0. Получаем систему уравнений* $x - 2y = 0, x + 3y + 5 = 0$. *Откуда, очевидно, x=-2, y=-1.*
<u>*Ответ:*</u> *-3*

6. На сторонах угла ABC отмечены точки M и K так, что углы BMC и BKA равны, BM = BK, AB = 15, BK = 8, CM = 9. Найдите периметр треугольника COK, где O – точка пересечения прямых AK и CM.
<u>*Решение:*</u> *Треугольники ABK и CBM равны (по стороне и прилежащим углам, так как ∠ABC-общий). Поэтому ∠BCM = ∠BAK и CB = AB = 15, значит, CK = AM = 7. Учитывая также, что ∠CKO = ∠AMO (они дополняют равные углы до развернутых), получим, что треугольники COK и AOM равны. Следовательно, OK = OM. Таким образом, Периметр треугольника COK = CK + CO + OK = CK + CO + OM = CK + CM = 16.*
<u>*Ответ:*</u> *16*

7. Галя задумала натуральное число. Затем она нашла произведение всех цифр числа и умножила на само число. В результате получилось 1386. Какое число задумала Галя? Укажите все возможные варианты. В ответе напишите сумму всех чисел. Например, если у Вас получилось, что Галя могла загадать 507 или 123, то в ответе нужно написать 630 (507+123=630)

   *<u>Решение:</u> Разложим число 1386 на простые множители. 1386=2*3*3*7*11. Множитель 11 не цифра, а значит 11 содержится в самом числе. То есть число представимо в виде 11x. Заметим, что 7 не может быть в записи самого числа, то есть может входить только в множители. Действительно, во-первых , заметим, что число больше 200 не подойдёт, так как 200*7>1386, во-вторых, чисел представимых в виде 11x и содержащее одну семерку два: 176, 187, не трудно убедиться, что они не подходят условию задачи. Следовательно, число представимо в виде 77x, т.е. осталось разобраться с множителями 2,3,3. Далее, очень простым перебором, убеждаемся, что это число 231.*

   <u>Ответ:</u> 231

8. Петя расставляет в ряд 10 различных цифр (0,1,2,…,9) так, чтобы получилось число у которого цифра 0 стоит между цифрами 3 и 1 (между цифрами 3 и 0 и между цифрами 0 и 1 могут быть еще цифры, например расстановка 45**3**2**0**9768**1** подходит, также подходит расстановка 2**10**756**3**948). Сколько ВСЕГО таких расстановок, если каждую цифру в каждом числе можно использовать ровно один раз и число не может начинаться с нуля?

   *<u>Решение:</u> Всего 10-значных наборов у которых все цифры разные 10! (10*9*8*7*…*1), так как на первом месте может быть одна из 10 цифр, на втором – любая из 9 оставшихся, на третьем - любая из 8 оставшихся и так далее. Заметим, что перестановок на числах 1,0,3 – 6 штук (или 3!). В нашем случае это комбинации: (*1*0*3*),(*1*3*0*),(*3*0*1*),(*3*1*0*),(*0*1*3*),(*0*3*1*), где вместо * может быть любое количество цифр, в том числе и ни одной, но всего в каждой комбинации 10 различных цифр. Из них подходят только два типа: (*1*0*3*) и (*3*0*1*), то есть треть от общего количества. Заметим, что перестановки у которых на первом месте 0 заведомо не подходят, а значит чисел начинающихся на 0, не удовлетворяющих условиям задачи быть не может. Таким образом, ответ 10!/3 – количество всех наборов удовлетворяющих условиям задачи.*

   <u>Ответ:</u> 1209600