

Олимпиада по математике сентябрь 2015

Школьный этап

5 класс

Первый тур

1. Василиса Премудрая наварила 60 литров варенья и разлила его в банки по 3 и 5 литров. Всего у неё получилось 18 полных банок. Сколько трехлитровых банок заполнила Василиса?

Решение: Пусть все 18 банок были пятилитровые, тогда Василиса сварила $5 * 18 = 90$ литров варенья. Но сварено было 60 литров, значит таким образом сварено 30 лишних литров. Тогда банок меньшего объема, то есть 3 литровых ровно $30 / (5 - 3) = 15$.

Ответ: 15 банок

2. Петя разбрасывает игрушки со скоростью 36 игрушек в минуту, а убирает со скоростью 3 игрушки в час. Сколько суток Петя будет убирать игрушки, если всего 10 минуток их поразбрасывает?

Решение: Петя разбросал ровно $36 * 10 = 360$ игрушек. Убирать их он будет $360 / 3 = 120$ часов, то есть $120 / 24 = 5$ дней.

Ответ: 5 суток

3. В 8 часов утра группа туристов отправилась пешком с турбазы в город со скоростью 6 км в час, а в 11 часов вслед за ними выехала другая группа туристов на велосипедах со скоростью 12 км в час. Определите расстояние в километрах от турбазы до города, если обе группы прибыли в город одновременно.

Решение: Так как группы прибыли в город одновременно, то вторая группа нагнала первую в городе, и мы можем посчитать за какое время: Расстояние между группами было $(11 - 8) * 6 = 18$ км, значит вторая группа нагнала первую за $18 / (12 - 6) = 3$ часа. Тогда расстояние между турбазой и городом можно вычислить как путь второй группы, то есть $3 * 12 = 36$ км

Ответ: 36 км

4. Найдите три последовательных числа, сумма которых равна 72. В ответ запишите большее из этих чисел. Решение: Пусть среднее число равно x . Тогда сумма трех чисел, где данное среднее, равна $(x-1) + x + (x+1) = 3x$ и по условию равна 72. Значит $x = 72/3 = 24$. Значит большее число равно $24 + 1 = 25$.

Ответ: 25

5. Имеется пять карточек, на каждой записано по одной цифре: 1; 3; 4; 2; 8. Сколько пятизначных нечетных чисел можно составить из этих карточек?

Решение: У нечетного числа последняя цифра нечетна: таких карточек у нас всего две, а именно 1 и 3. Значит, на последнее место в искомым числах у нас 2 варианта поставить карточку. После выбора последней карточки мы можем ставить их в любом порядке, а значит остается 4 (первое место) * 3 (второе место) * 2 (третье место) * 1 (четвертое место) = 24 варианта. Всего $24 * 2 = 48$ чисел.

Ответ: 48 чисел

6. Запишите наименьшее одиннадцатизначное натуральное число, в котором есть все цифры.

Решение: На первом месте числа не может стоять цифра 0, а следующая наименьшая цифра 1, ставим ее (при иной цифре уже получим число больше). Далее на каждое следующее место будем ставить наименьшую возможную цифру, так чтобы оставшееся число цифр было не меньше числа еще не использованных, тем самым гарантированно получаем наименьшее число (можно поразрядно сравнивать наше число с другими и доказать его минимальность). Тогда итоговое число 10023456789.

Ответ: 10023456789

7. На плоскости нарисовали 18 точек. Каждую точку соединили с десятью другими. Сколько всего отрезков провели?

Решение: Сколько всего пар точек, среди которых проводили отрезок? $18 * 10 = 180$, но так мы посчитали каждую пару два раза, так как задавали ее одной точкой, а в паре их две. Значит всего пар $180 / 2 = 90$, сколько и отрезков.

Ответ: 90

8. У великана длина шага равна 143 см. У гнома шаг больше 20 см, но меньше 90 см и равен целому числу сантиметров. Великан и гном прошли по одной дороге 100 м. Гном заметил, что их следы совпали ровно 11 раз, считая точку с которой они начали двигаться. Сколько сантиметров шаг у гнома?

Решение: Пусть длина шага гнома равна x ($20 < x < 90$). Тогда $D = \text{НОК}(143, x)$ – минимальное расстояние, через которое шаги гнома и великана будут совпадать. Пусть шаги совпадают в конце каждого отрезка длиной D . Тогда в пути, пройденном Великаном и гномом менее 11, но не менее 10 таких отрезков (так как считается еще начальная точка). Значит $10 \leq (10010 / D) < 11$. Значит $D > 910$ и $D \leq 1001$. Заметим, что $D = 143 * A$, где A – множители x , не содержащиеся в 143. Тогда $A > 910 / 143$ и $A \leq 1001 / 143$. Значит, $6 < A \leq 7$. Так как A – натуральное, то $A = 7$. Тогда искомые числа x могут быть 7 и $11 * 7 = 77$ ($13 * 7 = 91 > 90$).

Ответ: 77

Второй тур

1. В библиотеке 984 книг хранились в 4 одинаковых шкафах. Один шкаф решили заменить и переложили книги из него в 9 коробок. Все коробки оказались полными, причем вместимость каждой коробки 24 или 30 книг. Сколько получилось коробок с 30 книгами? Решение: В каждом шкафу $984 / 4 = 246$ книг. Пусть все коробки были вместимостью 30 книг, тогда мы разместили $30 * 9 = 270$ книг. Лишних книг $270 - 246 = 24$. Тогда коробок по 24 книги ровно $24 / (30 - 24) = 4$, значит коробок из 30 книг $9 - 4 = 5$.

Ответ: 5 книг

2. Начинаящий автор пишет рассказы со скоростью 2 строчки в минуту. Редактор читает эти рассказы по 15 строчек в час и тратит на это 4 часа каждый день. Сколько дней будет читать редактор рассказ, который автор написал за 6 часов?

Решение: Все автор написал $2 * 6 * 60 = 720$ строчек, в день редактор читает по $15 * 4 = 60$ строчек, значит всего ему понадобится $720 / 60 = 12$ дней.

Ответ: 12 дней

3. В 10-00 утра из города А в город В отправилась группа школьников на велосипедах со скоростью 11 км в час, а в 14-00 вслед за ними поехали родители на квадроциклах со скоростью 22 км в час. Они догнали школьников на полпути от А до В. Найдите расстояние в километрах от А до В.

Решение: Пусть полпути родители проезжают за x часов, тогда школьники за $x + (14 - 10) = x + 4$ часа. Расстояние для обеих групп это равное, значит $x * 22 = (x + 4) * 11$, значит $2x = x + 4$, $x = 4$. Тогда все расстояние равно $22 * 2x = 176$ километров.

Ответ: 176 километров

4. Найдите три последовательных нечетных числа, сумма которых равна 99. В ответ запишите меньшее из этих чисел.

Решение: Пусть среднее из этих чисел равно x , тогда сумма этих трех чисел равна $(x - 2) + x + (x + 2) = 3x = 99$, значит $x = 33$, а меньшее число $33 - 2 = 31$.

Ответ: 31

5. Имеется пять карточек, на каждой записано по одной цифре: 2; 3; 4; 7; 8. Сколько пятизначных четных чисел можно составить из этих карточек?

Решение: У четного числа последняя цифра четная, мы имеем три таких карточки, значит на последнее место 3 варианта поставить карточку. На остальные места в числе мы можем ставить карточки как хотим, значит выходит 4 (первое место) $* 3$ (второе место) $* 2$ (третье место) $* 1$ (четвертое место) = 24 варианта. Всего $24 * 3 = 72$ чисел.

Ответ: 72 чисел

6. Запишите наибольшее одиннадцатизначное число, в котором есть все цифры.

Решение: На каждое следующее место будем ставить наибольшую возможную цифру, так чтобы оставшееся число цифр было не меньше числа еще не использованных, тем самым гарантированно получаем наибольшее число (можно поразрядно сравнивать наше число с другими и доказать его максимальность). Тогда итоговое число 99876543210.

Ответ: 99876543210

7. В офисе 17 компьютеров. Каждый компьютер требуется соединить сетевым шнуром с десятью другими. Сколько всего понадобится сетевых шнуров?

Решение: Всего пар компьютеров, требующих соединения $17 * 10 = 170$, но так мы посчитали каждую пару два раза, так как задавали ее одним компьютером, а в паре их два, значит всего пар $170 / 2 = 85$ и потребуется 85 шнуров.

Ответ: 85

8. Том Сойер на заборе длиной в 150 метров ставит краской отметку через каждые 153 см. Гекльберри Финн ставит метки другой краской через 119 см. Их первые метки совпали и были поставлены в начале забора. Сколько всего меток у них совпало?

Решение: Для того, чтобы в конце отрезка длиной D метки Тома и Гекльберии совпали, D должны быть кратно и 153 и 119. Выберем такое минимальное D, то есть $D = \text{НОК}(153, 119) = 7 * 9 * 17 = 1071 \text{ см}$. Тогда всего у ребят совпало $1 + 15000 / 1071 = 15$ меток.

Ответ: 15 меток