**2017 год, октябрь. Школьный этап олимпиады по математике.**

**9 класс (решения)**

**1 блок**

**1.** Сколько трёхзначных чисел, в записи которых отсутствуют цифры 0 и 5?

**Решение.** Каждая из трёх цифр числа выбирается 8 способами.

Поэтому всего  вариантов.

**2.** В вольере содержатся ротвейлеры и таксы. Ротвейлеры, составляющие 20 % числа всех собак в вольере, получают 50 % всего корма. На сколько процентов одна такса получает меньше корма, чем один ротвейлер?

**Решение.** Пусть имеется ротвейлеров, и каждый съедает единиц корма.

Тогда такс  Пусть каждая из них съедает единиц корма. Из уравнения находим  Значит, такса получает на 75% корма меньше, чем ротвейлер.

**3.** Найдите наибольшее значение выражения , если 

**Решение.** Выделив полные квадраты по обеим переменным, получим Отсюда  

**4.** Точка касания вписанной в прямоугольный треугольник окружности делит его гипотенузу на отрезки длиной 5 см и 12 см. Найдите периметр этого треугольника (в см).

**Решение.** Пусть  – радиус вписанной окружности. По теореме Пифагора имеем  Отсюда  Периметр равен 

**5.** Лодка плыла по течению реки. Ровно в полдень гребец, проплывая под мостом, загляделся на девушку и потерял шляпу. Через 15 мин он обнаружил пропажу, развернул лодку и поплыл за шляпой. Шляпу он поймал в километре от моста. Какова скорость реки (в км/ч)?

**Решение.** За шляпой лодка будет плыть также 15 мин, поскольку как скорость удаления лодки от шляпы (когда лодка плывёт по течению), так и скорость приближения лодки к шляпе (при движении против течения) равны собственной скорости лодки. Значит, к моменту своей поимки шляпа проплывёт 30 мин, а скорость реки 2 км/ч.

**6.** В двух шкатулках лежат монеты (золотые и серебряные), всего 70 монет. Отношение числа золотых монет к числу серебряных равно 5:4 в первой шкатулке и 7:10 во второй. Сколько всего золотых монет в двух шкатулках?

**Решение.** Пусть в первой шкатулке золотых монет и серебряных, а во второй  золотых и  серебряных. Тогда  Небольшой перебор показывает, что полученное уравнение имеет только одно решение в натуральных числах: Поэтому количество золотых монет равно 

**7.** Петя раскрасил клетки шахматной доски в несколько цветов. Оказалось, что каждая клетка граничит по стороне по меньшей мере с двумя клетками того же цвета. Какое максимальное количество цветов мог использовать Петя?

**Решение.** Для любого расположения трёх клеток какая-то из них не граничит одновременно с двумя другими. Поэтому клеток каждого цвета должно быть не менее 4. Следовательно количество цветов не более 16. Если разбить доску на квадратные блоки размером  каждый из которых покрасить своим цветом, получим пример нужной раскраски в 16 цветов.

**8.** Даны два целых положительных числа и . Известно, что если сложить сумму, разность, произведение и частное этих чисел, то получится 450. Каково наибольшее возможное значение ?

**Решение.** Условие задачипреобразуется в уравнение в натуральных числах  Поскольку  и  взаимно простые числа, делится на , то есть Отсюда **Полученное уравнение имеет три решения:  Решения исходного уравнения: (72,4); (28;14). Наибольшее значение равно 102.

**2 блок**

**1.** Сколько трёхзначных чисел, в записи которых отсутствуют цифры 1 и 6?

**Решение.** Первая цифра не может быть нулём, а также 1 и 6, значит, выбирается 7 способами, а каждая из двух других цифр числа выбирается 8 способами. Поэтому всего  вариантов.

**2.** В вольере содержатся ротвейлеры и таксы. Ротвейлеры, составляющие 40 % числа всех собак в вольере, получают 70 % всего корма. На сколько процентов один ротвейлер получает больше корма, чем одна такса?

**Решение.** Пусть имеется ротвейлеров, и каждый съедает единиц корма.

Тогда такс  Пусть каждая из них съедает единиц корма. Из уравнения находим  Значит, ротвейлер получает на 250% корма больше, чем такса.

**3.** Найдите наименьшее значение выражения , если 

Выделив полные квадраты по обеим переменным, получим Отсюда    

**4.** Точка касания вписанной в прямоугольный треугольник окружности делит его гипотенузу на отрезки длиной 5 см и 12 см. Найдите площадь этого треугольника (в кв. см).

**Решение.** Пусть – радиус вписанной окружности. По теореме Пифагора имеем  Отсюда  Площадь равна 

**5.** Лодка плыла по течению реки. Ровно в полдень гребец, проплывая под мостом, загляделся на девушку и потерял шляпу. Через 20 мин он обнаружил пропажу, развернул лодку и поплыл за шляпой. Шляпу он поймал в километре от моста. Какова скорость реки (в км/ч)?

**Решение.** За шляпой лодка будет плыть также 20 мин, поскольку как скорость удаления лодки от шляпы (когда лодка плывёт по течению), так и скорость приближения лодки к шляпе (при движении против течения) равны собственной скорости лодки. Значит, к моменту своей поимки шляпа проплывёт 40 мин, а скорость реки 1,5 км/ч.

**6.** В двух шкатулках лежат монеты (золотые и серебряные), всего 90 монет. Отношение числа золотых монет к числу серебряных равно 3:2 в первой шкатулке и 4:7 во второй. Сколько всего серебряных монет в двух шкатулках?

**Решение.** Пусть в первой шкатулке золотых монет и серебряных, а во второй золотых и серебряных. Тогда  Видно, что  кратно 5. Подходит только При этом  Поэтому количество серебряных монет равно 

**7.** Вася раскрасил клетки шахматной доски в несколько цветов. Оказалось, что каждая клетка граничит по вершине по меньшей мере с двумя клетками того же цвета. Какое максимальное количество цветов мог использовать Вася?

**Решение.** Ясно, что клеток каждого цвета должно быть не менее трёх. Следовательно, количество цветов не более 21. Легко разбить доску на 10 прямоугольников  и квадрат  Теперь каждый прямоугольник  разобьём на два трёхклеточных уголка. Далее уголки и квадрат красим разными цветами. Получится пример нужной раскраски в 21 цвет.

**8.** Даны два целых положительных числа и . Известно, что если сложить сумму, разность, произведение и частное этих чисел, то получится 450. Каково наибольшее возможное значение ?

**Решение.** Условие задачипреобразуется в уравнение в натуральных числах  Поскольку  и  взаимно простые числа, делится на , то есть Отсюда **Полученное уравнение имеет три решения:  Решения исходного уравнения: (72,4); (28;14). Наибольшее значение равно 