Школьный этап олимпиады по математике

Октябрь 2018 г.

11 класс

2 блок

1. Пусть $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$. Вычислите $3(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$.

Ответ: -8.

Решение. Нужно возвести исходное равенство в квадрат. Кроме того, $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$.

2. Сумма первых n членов последовательности равна n^2+n (при любом натуральном n). Найдите 234-й член этой последовательности.

Ответ: 468.

Решение. $a_1 = 2$. При $n > 1$ имеем $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n - (n-1)^2 - (n-1) = 2n$. Поэтому $a_{234} = 2 \cdot 234 = 468$.

3. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x-25} + \sqrt{x} + \sqrt{x+25} = 12$?

Ответ: 0.

Решение. ОДЗ уравнения $x \geqslant 25$. Но тогда

$$\sqrt{x-25} + \sqrt{x} + \sqrt{x+25} \geqslant 0 + 5 + \sqrt{50} > 12.$$

Поэтому решений нет.

4. Медианы, проведённые из вершин A и B треугольника ABC, друг другу перепендикулярны. Найдите площадь квадрата со стороной AB, если $BC = 22$, $AC = 34$.

Ответ: 328.

Решение. Пусть D — середина BC, E — середина AC, M — точка пересечения медиан. Положим $MD = a$, $ME = b$. Тогда $AM = 2a$, $BM = 2b$. Из прямоугольных треугольников BMD и AME соответственно имеем $a^2 + 4b^2 = BD^2 = 11^2$ и $4a^2 + b^2 = AE^2 = 17^2$. Сложив полученные равенства, после деления на 5 получим $a^2 + b^2 = 82$. Отсюда $AB^2 = AM^2 + BM^2 = 4(a^2 + b^2) = 328$.

5. Известно, что $a + b + c = 5$ и $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 1{,}5$. Чему равно значение выражения $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}$?

Ответ: 4,5.

Решение. Перемножим левые части заданных равенств:

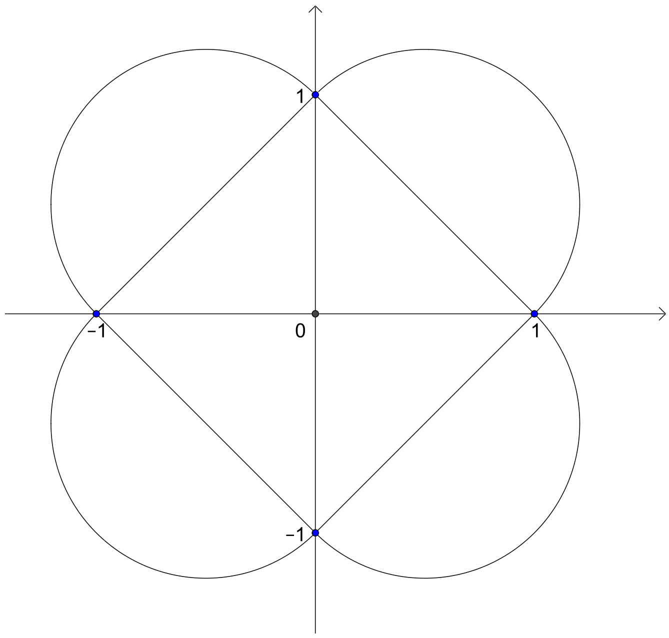
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) = 3 + \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}.$$

Отсюда легко находится искомое значение.

6. Пусть A и B — площади фигур, ограниченных соответственно линиями $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ и $x^2 + y^2 = 1$. Вычислите $A - B$.

Ответ: 2.

Решение. Фигура, ограниченная линией $x^2+y^2 = |x|+|y|$, разбивается на 4 полукруга диаметром $\sqrt{2}$ и квадрат со стороной $\sqrt{2}$.



Отсюда $A = 4 \cdot \frac{\pi}{4} + 2 = \pi + 2$. Кроме того, $B = \pi$ (площадь единичного круга). Значит, $A - B = 2$.

7. В клетчатом прямоугольнике 5×4 нужно пометить 5 клеток так, чтобы в каждой строке и каждом столбце была помечена хотя бы одна клетка. Сколько способов это сделать?

Ответ: 240.

Решение. Из условия следует, что в каком-то столбце помечено две клетки (а в остальных — по одной). Этот столбец можно выбрать 4 способами, а две помеченные клетки в нём $C_5^2 = 10$ способами. Оставшиеся три клетки выбираются $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способами. По правилу произведения, всего получится $4 \cdot 10 \cdot 6 = 240$ вариантов.

8. Вычислите

$$\frac{1^2-1+1}{1^4+1} + \frac{2^2-2+1}{2^4+2} + \frac{3^2-3+1}{3^4+3} + \ldots + \frac{99^2-99+1}{99^4+99}.$$

Ответ: 0,99.

Решение. Преобразуем обший член суммы

$$\frac{k^2-k+1}{k^4+k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Искомая сумма равна

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} = 0{,}99.$$