Муниципальный этап областной олимпиады школьников по математике
2018–2019 учебный год

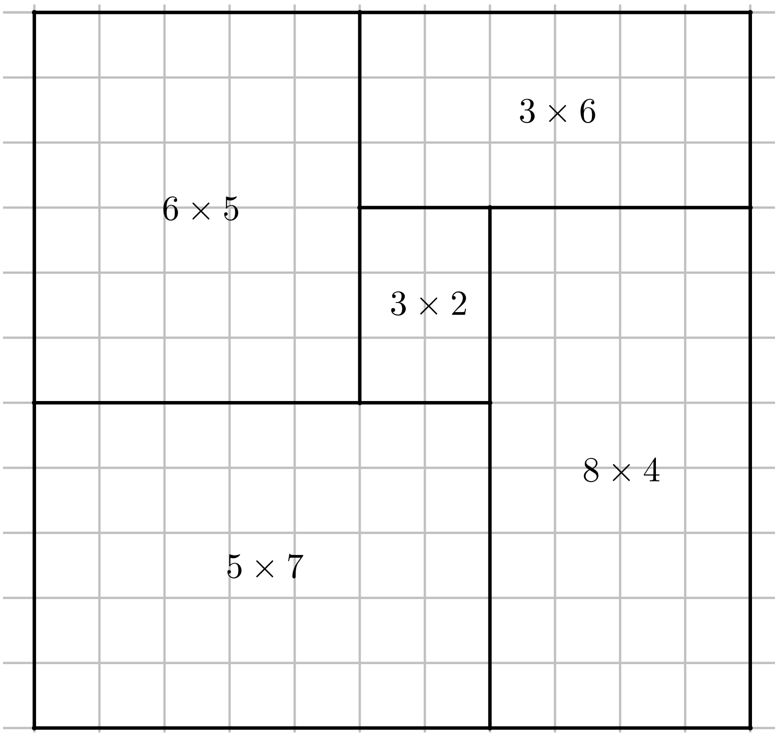
Решения задач. Критерии оценивания

7 класс

1. Можно ли сложить квадрат из пяти прямоугольников следующих размеров: 2×3, 3×6, 4×8, 5×6 и 5×7? (Прямоугольники можно размещать горизонтально или вертикально).

Ответ: да.

Решение. Пример приведён на рис.



Оценивание. За верное решение 7 баллов. Если вычислен только размер квадрата, 1 балл.

2. За круглым столом сидят 20 человек (их места пронумерованы по часовой стрелке числами от 1 до 20). Некоторые из них всегда говорят правду (это рыцари), а остальные всегда лгут (это лжецы). Известно, что у каждого рыцаря есть за столом ровно один друг, и этот друг — лжец, и у каждого лжеца также за столом ровно один друг, и этот друг — рыцарь. Каждому задали вопрос: «Ваш друг сидит рядом с Вами?» Люди, сидевшие на нечётных местах, ответили «нет». Сколько из тех, кто сидел на чётных местах, могли также ответить «нет»?

Ответ: никто.

Решение. Сидящие за столом разбиваются на пары друзей «рыцарь – лжец». Поэтому рыцарей и лжецов по 10 человек. Рассмотрим произвольную пару друзей. Если они сидят рядом, ответ рыцаря «да», ответ лжеца «нет». Если же они не рядом, то, наоборот, ответ рыцаря «нет», а ответ лжеца «да». Стало быть, среди прозвучавших ответов «да» и «нет» звучат одинаково часто — по 10 раз. Лимит на ответы «нет» исчерпан сидящими на нечётных местах. Все сидящие на чётных местах ответят «да».

Оценивание. За верное решение 7 баллов.

3. Петя расставил по кругу в каком-то порядке числа от 1 до 8. Вася выписал суммы соседних чисел. Могло ли у него получиться 8 последовательных чисел (в каком-то порядке)?

Ответ: нет.

Решение. Предположим, что у Васи получились последовательные числа

$$x-3, x-2, x-1, x, x+1, x+2, x+3, x+4.$$

Сумма этих чисел равна $8x+4$, и она должна быть в два раза больше суммы чисел от 1 до 8 (каждое из последних участвует ровно в двух суммах). Тогда

$$8x+4 = 2(1+2+\ldots+8) = 72; \quad 2x = 17.$$

Такого целого числа x нет.

Оценивание. За верное решение 7 баллов.

4. Имеется 10 карточек, на которых написаны числа от 1 до 10. Сколько способов разложить их по трём различным ящикам так, чтобы в каждом ящике была хотя бы одна карточка и ни в один ящик не попали карточки, на которых записаны соседние числа?

Ответ: $3 \cdot 2^9 - 6 = 1530$.

Решение. Будем последовательно раскладывать по ящикам числа от 1 до 10. Единицу можно положить в любой из трёх ящиков. Двойку — в любой из двух, отличных от ящика с единицей. Так будет и далее: каждый раз осуществляется выбор из двух ящиков. Получается $3 \cdot 2^9$ вариантов. Но некоторые из них недопустимы из-за наличия пустого ящика. Подсчитаем, сколько таких вариантов. Пустым может быть любой из трёх ящиков. Если пуст i-й, то два варианта разместить единицу, после чего остальные числа раскладываются однозначно. Значит, всего $3 \cdot 2 = 6$ недопустимых вариантов.

Оценивание. За верное решение 7 баллов. Если придумана процедура раскладывания чисел по порядку, но не учтены случаи с пустым ящиком, в результате чего найденный ответ $3 \cdot 2^9$, — 3 балла.

5. Найдите наименьшее число n, которое при делении на 3, 4, 5, $\ldots$, 10 даёт соответственно остатки 1, 2, 3, $\ldots$, 8.

Ответ: 2518.

Решение. Число $n+2$ делится на 3, 4, 5, $\ldots$, 10. Наименьшее число с таким свойством — наименьшее общее кратное чисел от 3 до 10. Это число $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \ldots 7 = 2520$. Наименьшее значение n равно $2520 - 2 = 2518$.

Оценивание. За верное решение 7 баллов.