

Школьный этап олимпиады по математике

Октябрь 2018 г.

9 класс

1 блок

1. Длина большего основания трапеции 12 см, а расстояние между серединами диагоналей 3 см. Какова длина (в см) меньшего основания?

Ответ: 6.

Решение. Если a — большее основание, b — меньшее, а c — расстояние между серединами диагоналей, то $c = \frac{a+b}{2} - 2 \cdot \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}$.

2. Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие — 12% воды. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих грибов? Ответ введите в кг.

Ответ: 2,5.

Решение. Сухого вещества в свежих грибах 2,2 кг, что составит 88% в сухих грибах. Составив соответствующую пропорцию, найдём вес сухих грибов.

3. Артём, Толя и Федя участвовали в беге на 1 км. (Считаем, что каждый из них бежал с постоянной скоростью). Артём на финише опередил Толю на 80 м. А Толя на финише опередил Федю на 50 м. Какое расстояние было между Артёмом и Федей в тот момент, когда финишировал Артём?

Ответ: 126 м.

Решение. Пусть скорости Артёма, Толи и Федей соответственно a , b и c м/с. Из условия следует, что $b = 0,92a$, $c = 0,95b$. Отсюда $c = 0,92 \cdot 0,95a = 0,874a$. Значит, когда Артём пробежит 1000 м, Федя преодолеет 874 м. Отставание составит 126 м.

4. Найдите 6-значное число, оканчивающееся на 1, которое уменьшится в 3 раза, если эту единицу перенести в начало числа.

Ответ: 428571.

Решение. Пусть a — число, полученное при зачёркивании последней цифры. Тогда $10a + 1 = 3(10^5 + a)$. Отсюда $a = 42857$.

5. По кругу стоят 15 чисел. Известно, что сумма любых шести соседних чисел равна 40. Какое число на 11-м месте, если на 9-м и 10-м местах стоят числа 11 и 7?

Ответ: 2.

Решение. Пусть на i -м месте стоит число a_i ($i = 1, \dots, 15$). Зафиксируем 5 подряд идущих чисел. Числа слева и справа от этой пятёрки должны совпасть. Поэтому $a_i = a_{i+6}$. Пойдём по кругу, отмечая одинаковые числа:

$$a_1 = a_7 = a_{13} = a_4 = a_{10} = a_1.$$

Теперь видно, что для любого i верно, что $a_i = a_{i+3}$, т. е. числа идут в таком порядке:

$$a, b, c, a, b, c, \dots, a, b, c.$$

Из условия следует, что $2(a + b + c) = 40$. Значит, сумма любых трёх соседних чисел равна 20. Отсюда ответ.

6. Найдите наибольший корень уравнения

$$|x^4 + x^2 - 2| = 3 - 2x^2 - x^3.$$

Ответ: 1.

Решение. Очевидно, $x = 1$ — корень уравнения. Если же $x > 1$, правая часть уравнения меньше нуля, в то время как левая часть всегда неотрицательна.

7. Имеется множество $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Сколько у него подмножеств (включая пустое и одноэлементные), в каждом из которых сумма каких двух чисел не равна 11?

Ответ: 243.

Решение. Рассмотрим пары чисел $(1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6)$. Из каждой пары мы можем включить в наше подмножество или первое число, или второе, или ни одного. Всего получается 3^5 комбинаций.

8. При каком наибольшем a система уравнений

$$\begin{cases} x - 4y = 1; \\ ax + y = 1. \end{cases}$$

имеет решение в целых числах?

Ответ: 1.

Решение. Из системы находим $x = \frac{5}{4a+1}$. Отсюда $a \leq 1$. С другой стороны, при $a = 1$ получаем решение $x = 1, y = 0$.