

Блок 2.

5-6 класс.

Задача 1. В классе 35 учеников. 15 из них занимаются дополнительно в спортивных секциях, 20 посещают музыкальный кружок, 3 ничем не занимаются дополнительно. Сколько учеников посещают и музыкальный кружок, и спортивную секцию?

Ответ: 3

Решение: из 35 учеников обязательно занимаются чем-то дополнительно $35-3=32$ ученика. Из них $32-20=12$ не занимаются в музыкальном кружке, то есть из 15-ти посещающих спортивные секции $15-12=3$ занимаются и в музыкальном кружке. Ответ: 3.

Задача 2. За один забег спортсмен пробегает 4 круга. Пробежав 3 круга, спортсмен уменьшил свою скорость в 2 раза и закончил забег на четверть часа позже, чем если бы он бежал с первоначальной скоростью. Сколько минут бежал спортсмен?

Ответ: 75

Решение: спортсмен потратил на забег из времени 4-х кругов времени столько, сколько должен был потратить на забег из 5-ти кругов. То есть 1 круг он должен был потратить те самые лишние 15 минут. $5*15=75$.

Задача 3. На доске выписаны все пятизначные числа, каждая из цифр у которых либо равна обоим соседним, либо отличается от них на 1 – от одного в большую сторону, а от другого в меньшую. Сколько таких чисел содержит в своей записи цифру пять?

Ответ: 11

Решение: 55555, 54321, 65432, 76543, 87654, 98765, 12345, 23456, 34567, 45678, 56789 – всего 11 чисел.

Задача 4. На станции «Лукоморье» продают карточки на 1, 5 и 20 поездок. Все карточки стоят целое число золотых монет. Пять карточек на одну поездку дороже, чем одна на 5 поездок, а 4 карточки на 5 поездок дороже одной карточки на 20 поездок. Оказалось, что самый дешёвый способ проезда для 33-х богатырей – это купить карточек на 35 поездок, потратив на это 33 золотые монеты. Сколько стоит карточка на 5 поездок (указать только число)?

Ответ: 5

Решение: пусть x , y , z – стоимости карточек по 1, 5 и 20 поездок соответственно, a, b, c – их количество, купленное богатырями. Тогда: $a+5b+20c=35$, $ax+by+cz=33$.

По условию, $5x > y$, $4y > z$ и, так как было куплено карточек на 35 поездок, а не 2 карточки на 20 поездок, то $2z > 33$. Откуда:

$$z \geq 17, y \geq 5, x \geq 2$$

так как по стоимости было выгоднее купить 1 билет на 20 поездок, а не 4 билета на 5 поездок, то билет на 20 поездок точно был куплен. Тогда единственно возможной комбинацией билетов является

$$a=1, b=3, c=0$$

$$17*1+5*3=32, \text{ а было потрачено 33 монеты. Следовательно, } x=18, y=5, z=2.$$

Задача 5. Алгоритм обработки числовой последовательности задан следующим образом:

1. Все элементы последовательности обрабатываются поочередно слева направо, начиная с первого и заканчивая последним элементом;
2. Если текущий элемент последовательности – четное число из него вычитается единица.
3. Если текущий элемент последовательности – нечетное число – из него вычитается 2

4. Если текущий элемент последовательности – ноль – он пропускается без изменений.

Этот алгоритм пять раз последовательно применили к следующей числовой последовательности:
123432123432121

Сколько в результирующей последовательности элементов, равных «-7»? В ответе укажите целое число

Ответ: 9

Решение.

Куда переходит число после пяти итераций?

1 - -1 -3 -5 -7 -9

2 - 1 -1 -3 -5 -7

3 - 1 -1 -3 -5 -7

4 - 3 1 -1 -3 -5

Значит 2 и 3 переходят в -7, в числе 123432123432121 – 9 троек и двоек, ответ – «9».

7-8 класс

Задача 1. Какой цифрой оканчивается число 4^{4^4} ?

Ответ: 6

Решение: число 4 в четной степени оканчивается на 6, в нечетной – на 4. Так как степень четная, то последняя цифра – 6.

Задача 2. Найти сумму значений параметра a , при которых уравнение

$$|x+1|-|x-1|=a$$

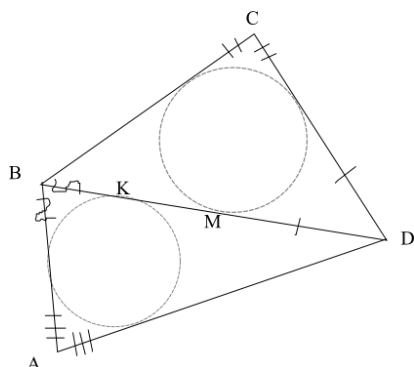
имеет бесконечно много решений.

Ответ: 0

Решение: аналогично задаче из блока 1. Только теперь таких значений параметра два: $a=2$ и $a=-2$, их сумма равна нулю.

Задача 3. В выпуклом четырехугольнике ABCD: $AB-BC=3$, $AD-DC=1$, Окружность, вписанная в треугольник ABD, касается стороны BD в точке K. Окружность, вписанная в треугольник BCD, касается BD в точке M. Найдите KM.

Ответ: 1



Решение: Заметим, что $BM-MD=BC-DC$, $BK-KD=AB-AD$. Откуда находим, что

$$AB-BC-(AD-DC)=BM-BK-(MD-KD)$$

$$3-1=MK-(-MK)=2KM, \text{ откуда } KM=1.$$

Задача 4. Дана последовательность из 11 чисел, x_1, x_2, \dots, x_{11} . В ней каждое число x_i равно либо 0, либо 1. Из этой последовательности получили последовательность из 10 чисел y_1, y_2, \dots, y_{10} по формулам: $y_1 = x_1 \cdot x_2, y_2 = x_2 \cdot x_3, \dots, y_{10} = x_{10} \cdot x_{11}$. Определите, какие из четырёх приведённых ниже последовательностей не могло быть получено указанным способом. Укажите номер последовательности (1): 0011001100; (2): 0001111101; (3): 1000111000; (4): 1100110110.

Ответ: 4

Решение: аналогично задаче блока 1.

Задача 5. Сколько записей удовлетворяют условию: **Пятёрки > 8 ИЛИ (Прогулов > 2 И Лет <= 13)?**

Номер	Имя	Пятёрки	Прогулов	Лет
1	Вася	5	1	14
2	Петя	2	5	13
3	Аня	10	0	12
4	Инна	3	2	13
5	Настя	7	3	14

Ответ: 2

Решение: не подходит, так как пятёрок <8 и прогулов <2

Подходит

Подходит

Не подходит, так как пятёрок <8 и прогулов <2

Не подходит, так как пятёрок <8 и лет >13

9 класс.

Задача 1. Найдите сумму цифр квадрата числа 333...3 (сто троек).

Ответ: 900

Решение: задача 1 10-го класса 1-й блок.

Задача 2. Первый насос набирает полный бассейн за 2 часа. Второй насос закачивает за день шесть бассейнов. Слить бассейн воды можно через сток за час. За сколько часов опустеет один полный бассейн, если включены оба насоса и сток?

Ответ: 4

Решение: первый бассейн закачивает за час $\frac{1}{2}=0,5$ бассейна. Второй – $\frac{6}{24}=0,25$ бассейна. Насос выкачивает 1 бассейн за час. Бассейн изначально полон, тогда скорость сливания воды из бассейна если включены оба насоса и сток составляет $0,5+0,25-1=-0,25$ басс/час. Время слива полного бассейна тем самым $1/0,25=4$ часа.

Задача 3. Сколько имеется семизначных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?

Ответ: 34

Решение: аналогично задаче 3 из 1-го блока, только числа не могут начинаться с нуля.

Задача 4. Четыре фразы на русском языке записываются без знаков препинания и пробелов. Для зашифровывания каждой фразы используются неизвестные последовательности цифр x_1, x_2, \dots . Буквы во фразе последовательно заменяются на пары цифр согласно порядку их следования в алфавите (к однозначным числам слева дописывается 0: например, А будет заменяться на 01). Шифрование состоит в преобразовании получившейся цепочки цифр по следующему правилу. К первой цифре цепочки прибавляем цифру x_1 и записываем последнюю цифру суммы, потом ко второй цифре цепочки прибавляем x_2 и также записываем последнюю цифру суммы и т.д. Результат зашифровывания выглядит следующим образом:

1) 3703532519925327917085909750657981901587194945023834835000452922

2) 0436389637110156289614062778022668915272874106897713780236

3) 903913973306253415922423357601144271609271

4) 17915094077497245567822036742365175971

Известно, что две фразы зашифрованы с помощью одной и той же последовательности. Укажите номера последовательностей слитно.

Ответ: 23

Решение: аналогично задаче из 1-го блока.

Задача 5. В лифте дома две кнопки (+1) и (*2). При нажатии на первую (+1), лифт поднимается на один этаж. При нажатии на вторую (*2) лифт поднимается на этаж, номер которого равен текущему этажу умножить на 2. Сколько минимум надо нажатий на кнопки, чтобы подняться на 37 этаж если лифт находится на первом.

Ответ: 7

Решение: аналогично задаче 1-го блока.

10 класс

Задача 1. Найдите сумму цифр квадрата числа 666... 6 (сто шестёрк).

Ответ: 900

Решение: задача 1 из 11 класса, 1-го блока.

Задача 2. . Шерлок Холмс и доктор Ватсон, работая вместе, могут вырыть канаву за 4 часа, а засыпать за 2 часа. Если бы Холмс рыл канаву 6 часов, а затем Ватсон засыпал её 1 час, то канаву была бы вырыта на 75%. Какая часть канавы (в процентах) будет вырыта, если Ватсон будет рыть её 6 часов, а, затем, Холмс – засыпать 1 час?

Ответ: 25

Решение: Холмс и Ватсон роют канаву вместе со скоростью $X+B=25$ (% канавы/час), а засыпают со скоростью $-X1-B1=-50$ (% канавы/час). Если Холмс роет канаву 6 часов, а Ватсон засыпает 1 час, то

$6X-B1=75\%$ канавы. Если же Ватсон роет, а Холмс засыпает, то

$$6B-X1=6*(X+B) -(X1+B1) - (6X-B1) = 6*25 - 50 - 75 = 25 \%$$

Задача 3. На какое наибольшее количество частей делят 7 прямых плоскость?

Ответ: 29

Решение: аналогично задаче 1-го блока.

Задача 4. Женя решила поделиться забавным палиндромом с Ксюшей. Но, чтобы никто о нем больше не узнал, Женя удалила пробелы между словами, перемешала буквы и получила вот что: **колнёошакapelлашёланп**. Помогите Ксюше прочитать палиндром (палиндром – текст, читающийся одинаково в обоих направлениях. Например: «А роза упала на лапу Азора»).

Ответ: 5

Задача 5. В лифте дома две кнопки (+1) и (*2). При нажатии на первую (+1), лифт поднимается на один этаж. При нажатии на вторую (*2) лифт поднимается на этаж, номер которого равен текущему этажу умножить на 2. Сколько минимум надо нажатий на кнопки, чтобы подняться на 37 этаж если лифт находится на первом.

Ответ: 7

Решение: аналогично задаче 1-го блока.

11 класс.

Задача 1. Найдите сумму цифр квадрата числа $99\dots 9$ (сто девяток).

Ответ: 900

Решение: задача 1 9-го класса 1-го блока.

Задача 2. Катер и теплоход двигались с постоянными скоростями по перпендикулярным прямым, пересекающимся в точке А. Когда катер находился в точке А, расстояние между катером и теплоходом было равно 600 метров. Когда теплоход оказался в точке А, катер удалился от этой точки на 800 метров. Каким было наименьшее расстояние между катером и теплоходом?

Ответ: 480

Решение: аналогично задаче из 1-го блока.

Задача 3. На сколько частей делят плоскость прямые, продолжающие стороны правильного пятиугольника?

Ответ: 15

Задача 4. Линия связи состоит из 4-х каналов, пронумерованных числами 1,2,3,4. Для передачи по линии сигнала на каждый канал подается свой импульс, величина которого может быть 7, 9 или 11 единиц. В каждом канале есть усилитель, который увеличивает поданный импульс в 3^{i-1} раз, где i - номер канала. На выходе линии формируется сигнал, который равен остатку от деления на 81 суммы полученных по каналам импульсов. Какие импульсы необходимо подать на каналы, чтобы получить сигнал величиной 6 единиц? Ответ напишите подряд в порядке следования подаваемых импульсов.

Ответ: 911117

Решение: аналогично задаче 1-го блока.

Задача 5. Алфавит древнего племени состоит из четырёх букв А, О, У, Я. Словом является любая последовательность, состоящая не более, чем из 3 букв. Сколько слов в языке племени?

Ответ: 84

Решение: длина слова может быть равна 1, 2 или 3 буквы. Количество слов длины n – это число элементов выборки объема n из N элементов в схеме с возвращением. Оно равно N^n

В нашем случае ответ –

$$4 + 4^2 + 4^3 = 84$$