Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
по математике
2017-2018 учебный год
8 класс
Максимальный балл – 35

1. Автобус едет из пункта А до пункта В 40 минут, а автомобиль преодолевает этот же маршрут за 30 минут. Через сколько минут автомобиль догонит автобус, если выедет из пункта А на 5 минут позже автобуса?

Ответ; через 15 минут

Решение. Весь путь автомобиль преодолевает быстрее, чем автобус на 10 минут. Поэтому отставание в 5 минут он ликвидирует, преодолев ровно половину пути, что займет у него 15 минут.

Замечание. Конечно, возможно и решение с помощью переменных и составление уравнений.

Оценивание. За верное решение – 7 б.

2. Какое из чисел больше;

$$A = 207\cdot208208\cdot209209209$$

или

$$B = 209\cdot207207\cdot208208208?$$

Ответ; А = В

Решение. Каждое из чисел допускает разложение на множители;

$$207\cdot208\cdot209\cdot1001\cdot1001001$$

Оценивание. За верное решение 7 б.

3. Есть 10 детей с разной степенью одаренности. Экстрасенс может указать их трех предъявленных ему детей самого одаренного. Как за 6 таких сеансов наверняка выявить двух самых одаренных детей?

Решение. Возьмем три непересекающиеся тройки, определим самого одаренного в каждой тройке, а потом самого одаренного из этих трех. Тем самым за 4 сеанса мы нашли самого одаренного из 9 детей (пусть это ребенок x), одаренней его может быть только десятый ребенок (не вошедший в начальные три тройки). На роль второго из двух самых одаренных могут претендовать 5 человек, оставшиеся «победители» в двух тройках, дети из первоначальной тройки, в которую входил x, и десятый ребенок. Осталось сравнить трех из них, а затем «победителя» с двумя оставшимися претендентами.

Оценивание. За верное решение – 7 б.

4. В $m+n$-этажном доме интересный лифт. В нем всего две кнопки. При нажатии на одну из них лифт поднимается на m этажей вверх, а при нажатии на другую опускается на n этажей вниз. Когда сверху остается менее m этажей, лифт вверх не пойдет, как и не пойдет вниз, если снизу менее n этажей. Сколько раз нужно нажимать кнопки, чтобы лифт, отправившись с первого этажа, после нескольких подъемов и спусков вернулся на 1 этаж?

Ответ: $\frac{m+n}{d}$, где d – наибольший общий делитель m и n.

Решение. отметим такую особенность лифта; в каждый момент можно нажать только одну из кнопок (если бы были доступны обе кнопки, то этажей в доме было бы больше, чем $m+n$)

Пусть d – наибольший общий делитель m и n. Тогда $m = ad$, $n = bd$, где a и b – взаимно простые числа.

Пусть лифт находился на каком-то этаже и и вернулся на него, совершив x подъемов и y спусков. Тогда $xad = ybd$, *откуда* $xa = yb$. В силу взаимной простоты чисел a и b число x делится на b, а y на a.

Значит, $x \geq b$, $y \geq a$ и $x + y \geq a + b$. Отсюда следует, что если передвижений лифта было меньше, чем $a + b$, то вернуться на тот же этаж лифт не сможет.

Это означает, что после каждого из первых $a + b - 1$ нажатий лифт каждый раз оказывался на новом этаже. Заметим, что номера этих этажей имеют вид $1 + kd$, где $k < a + b$, а этажей такого вида $\frac{m+n}{d} = a + b$. Поэтому после $a + b$ нажатий лифт неминуемо окажется на 1-ом этаже, побывав до этого на всех доступных ему этажах по одному разу.

Оценивание. За верное решение 7 б. Если отмечено, что $x \geq a$ и $y \geq b$ и дан ответ $a + b$, но не показано (как это сделано в последнем абзаце приведенного выше решения), что в результате $a + b$ нажатий лифт действительно вернется на 1-й этаж (то, что первые $a + b$ нажатий будут такими, как нужно, совсем неочевидно!), 3 б.

5. По кругу стоят 12 положительных чисел. Каждое поделили на сумму этого числа и двух соседних. Пусть сумма этих дробей равна S. Докажите, что 1 < S < 7.

Решение. *Оценка снизу*. Пусть A – сумма исходных 12 чисел. Если знаменатель каждой из дробей увеличить до A, то каждая дробь уменьшится, а сумма новых дробей будет равна 1 (поскольку все знаменатели равны A, а сумма числителей тоже равна A). Поэтому S > 1.

Оценка сверху. Заметим, что сумма двух соседних дробей меньше 1. Действительно

$$\frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} < \frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} = 1$$

Разобьем дроби на 6 пар соседних и получим, что S < 6.

Оценивание. За полное решение – 7 б.

За доказательство $S > 1$ – 3 б., за доказательство $S < 7$ – 4 б.