Школьный этап олимпиады по математике

Октябрь 2018 г.

11 класс

1 блок

1. Пусть $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 3$. Вычислите $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

Ответ: 11.

Решение. Нужно возвести исходное равенство в квадрат.

2. Семиэтажная пагода украшена 381 лампой так, что количество ламп на каждом этаже, начиная со второго, вдвое меньше, чем на предыдущем. Сколько ламп на последнем этаже?

Ответ: 3.

3. Сколько корней имеет уравнение

$$\sqrt{x+2} + 3\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-2} + \sqrt{5x-1} = 10?$$

Ответ: 1.

Решение. ОДЗ уравнения $x \geqslant 1$. Левая часть уравнения $f(x)$ возрастающая непрерывная функция. При этом $f(1) = \sqrt{3} + 3 < 10$ и при больших x значение $f(x)$ больше любого наперёд заданного числа. Поэтому графики левой и правой частей уравнения пересекаются ровно в одной точке.

Решение. Пусть на последнем этаже n ламп. Тогда

$$381 = n(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^6) = n(2^7 - 1) = 127n.$$

Отсюда $n = 3$.

4. Медианы, проведённые из вершин A и B треугольника ABC, друг другу перепендикулярны. Найдите площадь квадрата со стороной AB, если $BC = 48$, $AC = 64$.

Ответ: 1280.

Решение. Пусть D — середина BC, E — середина AC, M — точка пересечения медиан. Положим $MD = a$, $ME = b$. Тогда $AM = 2a$, $BM = 2b$. Из прямоугольных треугольников BMD и AME соответственно имеем $a^2 + 4b^2 = BD^2 = 24^2$ и $4a^2 + b^2 = AE^2 = 32^2$. Сложив полученные равенства, после деления на 5 получим $a^2 + b^2 = 320$. Отсюда $AB^2 = AM^2 + BM^2 = 4(a^2 + b^2) = 1280$.

5. Известно, что $a + b + c = 7$ и $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 0{,}7$. Чему равно значение выражения $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}$?

Ответ: 1,9.

Решение. Перемножим левые части заданных равенств:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) = 3 + \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}.$$

Отсюда легко находится искомое значение.

6. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией

$$\sqrt{x^2-2x+1}+2\sqrt{y^2+4y+4}=4.$$

Ответ: 16.

Решение. Уравнение $|x-1|+2|y+2|=4$ задаёт ромб с диагоналями длиной 8 и 4.

7. Три квалифицированных работника должны выполнить четыре разные работы, причём каждый из них должен выполнить хотя бы одну работу, а на каждую работу назначается ровно один работник. Сколько способов назначить работников на работы?

Ответ: 36.

Решение. Из условия следует, что какой-то работник должен выполнить две работы (а остальные — по одной). Этого работника можно выбрать тремя способами, а две работы для него $C_4^2=6$ способами. Оставшиеся две работы среди остальных работников распределяются двумя способами. По правилу произведения, количество возможных распределений равно $3\cdot 6\cdot 2=36$.

8. Вычислите

$$\frac{2^2+2+1}{2^4-2}+\frac{3^2+3+1}{3^4-3}+\frac{4^2+4+1}{4^4-4}+\ldots+\frac{20^2+20+1}{20^4-20}.$$

Ответ: 0,95.

Решение. Преобразуем обший член суммы

$$\frac{k^2+k+1}{k^4-k}=\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}.$$

Искомая сумма равна

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{19}-\frac{1}{20}=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}=0{,}95.$$