Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников
По математике
2015-2016 учебный год
8 класс
Максимальный балл – 35

Решение задач

1. Ваня и Маня одновременно вышли навстречу друг другу из пунктов А и В. Ванина собака Бобик начинает движение вместе с Ваней и бежит, пока не встретит идущую навстречу Маню, а затем не переводя дух мчится назад, до встречи с Ваней, после чего снова разворачивается и бежит навстречу Мане и т.д. Бобик бегает между Ваней и Маней до тех пор, пока они не встретятся. Известно, что скорость Вани 4 км/ч, скорость Мани 3 км/ч, а скорость Бобика 11 км/ч. Какое расстояние пробежал Бобик, если расстояние между А и В 21 км? Какое общее расстояние пробежал Бобик по направлению от А к В?

Ответ: 33 км; 22,5 км

Решение

Ваня и Маня сближались со скоростью 7 км/ч, поэтому их встреча состоится через 3 ч после старта. За это время Бобик пробежит 11·3 км, а встреча состоится в 12 км от пункта А. Пусть Бобик пробежал x км по направлению от А к В и y км в противоположном направлении.

Тогда $x + y = 33, x - y = 12$. Из этих уравнений находим x = 22,5 км.

Оценивание: за верное решение всей задачи – 7 баллов, если решена только первая часть – 4 балла.

2. Вася записал натуральное число. Оказалось, что в этом числе среди любых двух цифр больше та, которая стоит правее. Петя умножил это число на 9. Коля подсчитал сумму цифр полученного произведения. Какой может быть эта сумма?

Ответ: 9

Решение

Пусть цифры числа n(слева направо) $a_1, a_2, \dots, a_k$. Заметим, что $9n = 10n - n$. Поскольку $a_k > a_{k-1} > \dots > a_1$, при вычитании из $10n$ числа n происходит перенос единицы только из разряда десятков в разряд единиц. Поэтому цифры числа $9n$ (слева направо) таковы: a_1, $a_2 - a_1$ $a_3 - a_2, \dots$, $a_k - 1 - a_{k-1}$, $10 - a_k$. Сумма этих цифр равна 9.

Оценивание: верное решение – 7 баллов

3. В пробирке находятся амебы трех типов: *A*, *B* и *C*. Две амебы любых двух типов могут слиться в одну амебу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке осталась одна амеба. Каков ее тип, если исходно амеб типа *A* было 19 штук, типа *B* – 20 штук, а типа С – 21 штука?

Ответ: В

Решение

Пусть a, b и c – число амеб типа А, В и С соответственно. При слиянии амеб типа А и В величина a – b не меняется. Если сливаются А и С, эта величина уменьшается на 2. Если сливаются В и С, эта величина увеличивается на 2.

Значит, при любом слиянии четность величины a – b остается неизменной. То же верно и по отношению к величинам b – c и c – a.

В заключительный момент одна из величин a, b и c равна 1, а две остальные равны нулю. Значит, эти две последние и изначально были одинаковой четности. Поэтому это a и c. А в одиночестве осталась амеба В.

Оценивание. Верное решение – 7 баллов. Если ответ угадан, но не обоснован – 1 балл.

4. Пусть f(n) – произведение всех цифр числа n. Вычислите сумму f(111) + f(112) + f(113) + … + f(998) + f(999).

Ответ: $45^3 = 91\,125$.

Решение

Если раскрыть скобки в произведении

$$(1 + 2 + \ldots + 9)(1 + 2 + \ldots + 9)(1 + 2 + \ldots + 9),$$

то получим в точности искомую сумму.

Оценивание: верное решение – 7 баллов.

5. *ABC* – равносторонний треугольник со стороной 1 *см*. Найдите все точки плоскости, для каждой из которых наибольшее из расстояний до вершин этого треугольника равно 1 *см*.

Решение

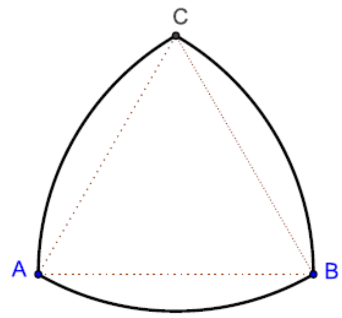
Пусть точка M входит в искомое ГМТ, т.е. наибольшее из расстояний MA, MB и MC равно 1. Это означает одновременное выполнение двух условий:

1) Каждое из трех расстояний равно 1;
2) Хотя бы одно из трех расстояний равно 1.

Точки, удовлетворяющие первому условию, составляют пересечение трех единичных кругов с центрами в вершинах треугольника ABC.

Точки, удовлетворяющие второму условию, составляют объединение трех единичных окружностей с центрами в вершинах треугольника ABC.

Если же выполнены оба условия, получаем объединение дуг трех окружностей с центрами в вершинах треугольника с концами в двух других вершинах и угловой величиной 60^0.



Замечание. Полученную фигуру называют треугольником Рело. Много интересного о свойствах и применениях треугольника Рело можно узнать на сайте «Математические этюды» http://www.etudes.ru/ru/mov/mov001.

Оценивание. За верное решение – 7 баллов.