**Задания для 8 класса**

**Вариант 1.**

1. +От прямоугольника отпилили квадрат со стороной равной меньшей стороне прямоугольника. Оказалось, что у нового прямоугольника площадь уменьшилась на 25%. На сколько процентов уменьшился периметр?

Ответ: 20

Решение. Если стороны прямоугольника $a$ и $b$, то старая площадь была $ab$, а новая $a(b-a)$. Таким образом, $a\left(b-a\right)=0.75ab$. Откуда $b=4a$. Периметр уменьшился с $10a$ до $8a$, т.е. на 20%.

1. +На выставке цветов было $N$ посетителей, которых попросили заполнить анкету о том, что для них самое важное при выборе букета. Ровно $\frac{9}{14}$ опрошенных поставили галочку, что важен цвет, ровно $\frac{7}{12}$ отметили, что важен запах. В целом, 753 человека отметили в анкете и то, и другое. Сколько различных значений может принимать $N$?

Ответ: 24

Решение: Число $N$ делится и на 12 и на 14, поэтому $N=84m$. Заметим, что суммарно за цвет и запах поставили $54m+49m=103m$ галочек, поэтому как минимум $103m-84m=19m$ анкет содержат галочки за обе позиции. Таким образом получаем неравенство $19m\leq 753\leq 49m$. Откуда получаем, что $m$ может принимать ровно 24 значения.

1. +Сколько корней у уравнения $\left|\left(|x|-2\right)^{2}-10\right|=6$?

Ответ: 5

1. +Найдите количество пятизначных чисел, в которых есть хотя бы одна цифра, встречающаяся больше одного раза.
Ответ: 62784
Решение: Всего пятизначных чисел 90000. Из них ровно $9×9×8×7×6=27216$ без повторяющихся цифр.
2. +Известно, что $a+\frac{1}{a+1}=b+\frac{1}{b-1}-2$ и $a-b+2\ne 0$. Найдите $ab-a+b$.
Ответ: 2
Решение: Из равенства получаем $a-b+2=\frac{1}{b-1}-\frac{1}{a+1}$. Приводя к общему знаменателю и сокращая, получаем $\left(a+1\right)\left(b-1\right)=1$.

6.+Незнайка искал клад. Согласно пиратской карте нужно было от сломанной сосны пройти 1м на север, потом повернуть направо и пройти 3м, потом снова повернуть направо и пройти 5м, и т.д., последняя инструкция была пройти 31м (1м, 3 м, 5м,…29м, 31м), что Незнайка и проделал. Если бы Незнайка подумал, то просто бы посчитал, сколько метров нужно сместиться по горизонтали и сколько по вертикали от начального места. Вот и найдите, на сколько метров ему нужно пройти от сломанной сосны по горизонтали и по вертикали, а потом напишите сумму этих чисел.
Ответ: 16

Решение: Первый переход 1 м. совершен на юг (вниз), прямо, без поворотов. В результате первых 4 поворотов Незнайка сместился на 4 м левее и 4 м вниз. В результате следующих четырех поворотов на 4 м правее и 4 м вниз. Потом опять 4 м левее и 4 м вниз. Последний цикл не полный, 27 29 31, перемещение на 4 м вправо и 29 вверх. Итого: по горизонтали 4-4+4-4=0, по вертикали -1-4-4-4+29=16. Ответ 0+16=16

7+Два гонщика ездят с постоянными скоростями навстречу друг другу по круглому траку. Известно, что они встречаются каждые 36 секунд, при этом первый гонщик делает круг за время от 80 до 100 секунд, а второй ровно за $N$ секунд, где $N$ – целое число. Найдите сумму максимального и минимального возможного значения $N$.
Ответ: 122
Решение: Пусть $a$ и $b$ – скорость гонщиков в кругах/сек. Тогда $\frac{1}{a+b}=36$, $80<\frac{1}{a}<100$, $\frac{1}{b}=N$. Избавляясь от $a$, мы получаем неравенство $\frac{1}{80}>\frac{1}{36}-\frac{1}{N}>\frac{1}{100}$. Решая отдельно левое и правое неравенства, мы находим границы для $N$. Это 57 и 65.

8+Найдите цифру десятков в числе $7^{2017}$.

Ответ: 0.

**Вариант 2.**

1. +У прямоугольника площадью 36 одну из сторон уменьшили на 10%, а другую увеличили на 1. Оказалось, что площадь не изменилась. Найдите периметр исходного прямоугольника.
Ответ: 26
Решение. Если стороны прямоугольника $a$ и $b$, то старая площадь была $ab$, а новая $0.9a(b+1)$. Таким образом, $ab=0.9a(b+1)$. Откуда $b=9$, а значит $a=4$.
2. +На выставке цветов было $N$ посетителей, которых попросили заполнить анкету о том, что для них самое важное при выборе букета. Ровно $\frac{8}{15}$ опрошенных поставили галочку, что важен цвет, ровно $\frac{7}{10}$ отметили, что важен запах. В целом, 753 человека отметили в анкете что-то одно. Сколько различных значений может принимать $N$?
Ответ: 118 (5 баллов)
Решение: Число $N$ делится и на 15 и на 10, поэтому $N=30m$. Заметим, что суммарно за цвет и запах поставили $16m+21m=37m$ галочек, поэтому как минимум $37m-30m=7m$ анкет содержат галочки за обе позиции. Значит анкет с одной галочкой максимум $\left(16m-7m\right)+\left(21m-7m\right)=23m$. А минимум таких анкет $21m-16m=5m$. Таким образом получаем неравенство $5m\leq 753\leq 23m$. Откуда получаем, что $m$ может принимать ровно 24 значения.
3. +Сколько корней у уравнения $\left|\left|2x-3\right|-2∙\left|1-x\right|\right|=\frac{1}{2}$?

Ответ: 2

1. +Найдите количество пятизначных чисел таких, что каждая цифра из их записи встречается хотя бы 2 раза.
Ответ: 819
Решение: В таких числах либо все цифры одинаковы (9 вариантов), либо одна цифра встречается 2 раза, а другая 3. Если эти две цифры не 0, то вариантов их комбинаций существует $9×8$, и на каждую комбинацию еще 10 вариантов расставить их по 5 местам. Если же одна цифра это 0, то вторая цифра – одна из 9 оставшихся, причем она первая в числе, а вариантов расставить остальные цифры будет 10.
2. +Для чисел $a$ и $b$ выполняются равенства $a+b=10$ и $a^{2}+b^{2}=167$. Найдите $a^{3}+b^{3}$.
Ответ: 2005
Решение: Получаем что $2ab=\left(a+b\right)^{2}-\left(a^{2}+b^{2}\right)=-67$. Далее $a^{3}+b^{3}=(a+b)(a^{2}+b^{2}-ab)$=2005.
3. +Незнайка искал клад. Согласно пиратской карте нужно было от сломанной сосны пройти 1м на север, потом повернуть направо и пройти 2м, потом снова повернуть направо и пройти 3м, и т.д., последняя инструкция была пройти 31м, что Незнайка и проделал. Не будь он таким дураком, то просто бы посчитал сколько метров нужно сместится по горизонтали и сколько по вертикали от начального места. Но Вы же не такие? Вот и найдите, на сколько метров ему нужно пройти от сломанной сосны по горизонтали и по вертикали, а потом напишите сумму этих чисел.
Ответ: 32

Решение: Каждые 4 последовательных шага уводят нас на 2м вниз и 2м влево. За 28 шагов мы уйдём на 14м влево и вниз. Потом 29-ый и 31-ый шаг уведут нас еще на 2м вниз, а 30-ый шаг на 30м вправо. Итого 16м вправо и 16м вниз. В сумме 32.

1. +Два гонщика ездят с постоянными скоростями по круглому траку по часовой стрелке. Известно, что первый обгоняет второго каждые 136 секунд, при этом первый гонщик делает круг за время от 80 до 100 секунд, а второй ровно за $N$ секунд, где $N$ – целое число. Найдите сумму максимального и минимального возможного значения $N$.
Ответ: 572
2. +Найдите цифру десятков в числе $3^{2017}$.
Ответ: 6
Решение: Достаточно следить за последними двумя цифрами при возведении в степень, т.к. старшие разряды не повлияют на младшие при умножении. Поэтому легко последовательно найти последние 2 цифры чисел (умножаем последние две цифры числа сами на себя, чтобы найти последние две цифры следующего числа) $ 3^{5},3^{10}, 3^{20},3^{40}, 3^{80}, 3^{160}, 3^{320},3^{400}=3^{320}×3^{80}, 3^{800},3^{1600}, 3^{2000}=3^{1600}×3^{400}, 3^{2017}=3^{2000}×3^{10}×3^{5}×3^{2}$.