Школьный этап олимпиады по математике

Октябрь 2018 г.

10 класс

1 блок

1. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_8$ — арифметическая прогрессия. Найдите сумму её членов, если $a_4 + a_5 = 16$.

Ответ: 64.

Решение. $a_1 + a_8 = a_2 + a_7 = a_3 + a_6 = a_4 + a_5$.

2. Уравнение $x^2 + b_1x + c = 0$ имеет корни 4 и 24, а уравнение $x^2 + bx + c_1 = 0$ имеет корни 14 и 6. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + bx + c = 0$.

Ответ: 208.

Решение. Применив теорему Виета, получим $c = 4 \cdot 24 = 96$, $b = -(14 + 6) = -20$,

$$x_1 + x_2 = 20; \quad x_1 \cdot x_2 = 96; \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 400 - 192 = 208.$$

3. Пусть $x + \frac{1}{y} = 4; \quad y + \frac{1}{z} = 1; \quad z + \frac{1}{x} = \frac{7}{3}$. Вычислите xyz.

Ответ: 1.

Решение. Если из первого и второго уравнения выразить x и z через y, то после подстановки соответствующих выражений в третье уравнение получим $25y^2 - 20y + 4 = 0$, откуда $y = \frac{2}{5}$. Дальнейшее понятно.

4. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отмечены соответственно точки A_1, B_1, C_1. Известно, что $\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{BB_1}{B_1C} = \frac{CC_1}{C_1A} = 4$. Найдите (в кв. см) площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 25 кв. см.

Ответ: 13.

Решение. Нетрудно видеть, что площадь каждого из треугольников AA_1C_1, BB_1A_1, CC_1B_1 равна $\frac{4}{25}$ от площади ABC. Отсюда и получается ответ.

5. Найдите наибольшее значение выражения $y - x$, если

$$x^2 + y^2 + 4x + 4y - 10 = 0.$$

Ответ: 6.

Решение. Выделим полные квадраты по обеим переменным:

$$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 18.$$

Это уравнение окружности с центром в точке $C(-2; -2)$. Нужно найти максимальное a, при котором прямая $y - x = a$ имеет хотя бы одну общую точку с данной окружностью. Это значение соответствует касательной к окружности, параллельной биссектрисе 1-й четверти.

6. Найдите 3-ю с конца цифру в десятичной записи числа $\dfrac{2018}{2^{2018}}$.

Ответ: 1.

Решение. Представим наше число в виде $\dfrac{1009}{2^{2017}} = \dfrac{1009 \cdot 5^{2017}}{10^{2017}}$. Теперь видно, что после запятой в этом числе 2017 цифр. Поэтому задача сводится к нахождению третьей с конца цифры числа $1009 \cdot 5^{2017}$. Рассмотрим последовательность, составленную из последних трёх цифр степеней пятёрки:

$$5, 25, 125, 625, 125, 625, 125, \ldots.$$

Начиная с 3-го члена эта последовательность периодическая, длина периода 2. Отсюда получаем, что последние три цифры числа 5^{2017} есть 125. После умножения на 1009 получим, что последние три цифры нашего числа также есть 125.

7. В ряд стоят 15 человек. Каждому из них в руки дают флажок одного из цветов радуги. Сколько вариантов распределения флажков, в которых цвета каких-то 7 соседних флажков слева направо идут в правильном порядке (т. е. как в радуге)?

Ответ: 51883188.

Решение.

Радуга может начинаться с одного из первых 9 мест. Оставшиеся 8 мест заполняются произвольно, число способов сделать это 7^8. Подсчитаем число комбинаций, содержащих по две радуги. Место единственного флажка, не входящего в эти радуги, выбирается 3 способами (этот флажок может быть на 1-м, 8-м или 15 месте), а его цвет 7 способами — всего $3 \cdot 7 = 21$ вариантов. Стало быть, всего комбинаций 15 флажков, содержащих радугу, равно $9 \cdot 7^8 - 21 = 51\,883\,188$.

8. В олимпиаде участвовало 100 школьников. Они решали 4 задачи. Никто не решил все четыре задачи. Первую задачу решили 90 участников олимпиады, вторую — 80, третью — 70, четвёртую — 60. Сколько человек одновременно решили первую и вторую задачу?

Ответ: 70.

Решение. Первую и вторую задачи решили не менее $90 + 80 - 100 = 70$ человек, а третью и четвёртую — не менее $70 + 60 - 100 = 30$ человек. Поскольку две указанные группы не пересекаются (ведь никто не решил все четыре задачи), в их объединении не меньше 100 человек, а, по условию, и не больше 100. Значит, в этих группах соответственно 70 и 30 школьников.