Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике 2019-2020 учебный год

10 класс

Решения задач. Критерии оценивания.

1. Назовем число непростым, если его остаток при делении на n равен n-2 для n, равных 3,4,5,6 и 7. Сколько непростых чисел среди чисел от 1 до 2019?

Ответ: 4.

Решение. Если число X – непростое, то число X+2 делится на 3,4,5,6 и 7 (и, значит, делится на $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7=420$). Среди чисел от 3 до 2021 чисел, кратных 420, ровно 4.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. За каждое найденное непростое (и отсутствие обоснования отсутствия других чисел)– по 1 баллу.

2. Барон Мюнхгаузен утверждает, что в любой компании из 8 человек найдутся трое попарно знакомых или четверо попарно незнакомых. Прав ли барон?

Ответ: Не прав.

Решение. Достаточно привести пример. Пусть 8 чел сидят за круглым столом, и каждый из них знаком со своими двумя соседями и с человеком напротив. Тогда нет «треугольников» знакомств. Если четверо попарно незнакомы, то среди них нет соседей. Поэтому они сидят «через одного». Но тогда среди них есть сидящие напротив друг друга, а они знакомы – противоречие.

Оценивание. За любой правильный пример – 7 баллов (за пробелы в доказательстве правильности примера – снять 1-3 балла). За правильный ответ без примера – 0 баллов.

3. В остроугольном треугольнике ABCпровели высоты AP, BQ и CR. Найдите угол A, если угол QPRравен 80°.

Ответ: 50°.

Решение. Прямоугольные треугольники BPA и BRC подобны, так что BP:BR=BA:BC. Поэтому треугольники BPR и BAC подобны, так что угол BPR равен углу A. Аналогично получается: угол CPQ равен углу A. Так как угол QPR равен 80°, то угол Aравен половинке от 180° - 80°, т.е., 50°.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов.

4. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}}+\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+5}}+....+\frac{1}{\sqrt{x+2018}+\sqrt{x+2019}}=42.$$

Ответ: x=6.

Решение. Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}}=\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}$.

Преобразуя аналогично остальные дроби, после сокращений получим уравнение $\sqrt{x+2019}-\sqrt{x+3}$ =42.

Решая это уравнение, находим x=6 . (Левая часть уравнения монотонна – она равна $\frac{2016}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2019}}$ x=6 – подходит: $\sqrt{2025}=45$, $\sqrt{9}=3$).

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. За выполненное упрощение, приведенное выше – 3 балла. За ошибки в решении иррационального уравнения – снять по баллу за каждую.

5. Куб со стороной 3 разбит на 27 единичных кубиков. Каждый из кубиков – белый или черный. Можно выбрать любой кубик и перекрасить его. При этом одновременно поменяют свой цвет еще 6 кубиков, расположенных в тех же столбцах (горизонтальных или вертикальных), что и выбранный кубик. Можно ли за несколько таких операций сделать все кубики черными, если изначально

   а) все кубики были белыми;

   б) белыми были все кубики, кроме одного;

   в) куб имел шахматную раскраску (одноцветные кубики не имели общих граней)?

Ответ: а) да б) нет в) нет.

Решение. а) достаточно выбрать, например, все кубики нижней грани: при этом каждый кубик этой грани перекрасится 5 раз, а все прочие – по разу.

б) Рассмотрим куб со стороной 2, содержащий черный кубик. Заметим, что при каждой операции в этом кубике меняет цвет четное количество кубиков (4, 2 или 0). Поэтому количество черных кубиков в этом кубе всегда будет нечетным.

в) Для каждого кубика q, пусть этот кубик был «выбранным» A_qраз, и B_q раз перекрашивался. Сосчитаем сумму S_bчисел B_qдля всех кубиков нижнего слоя из 9 кубиков: в эту сумму числа A_p, соответствующие кубикам нижней грани, войдут 5 раз, а числа, соответствующие остальным кубикам – по разу. Поэтому число S_b – той же четности, что и сумма S (по всем кубикам большого куба) всех чисел A_p. Повторяя те же рассуждения для среднего слоя, получим, что соответствующая сумма S_m также той же четности, что и S. Но этого не может быть: на одном слое нужно было перекрасить 4 кубика, а на другом – 5.

Оценивание. а) 1 балл б) 2 балла в) 4 балла (баллы суммируются).