Теперь рассмотрим ситуацию после наливания второй порции воды. Судя по изменению давления на заслонку, можно предположить, что вода полностью заполнила нижнюю трубу и частично – верхнюю:

$$H_1S_1 + h_2S_2 = 2V_0. \qquad (9)$$

Согласно закону Паскаля: $F_0 + \rho g(H_1 + h_2)S_1 = 4F_0$. Отсюда:

$$3F_0 = \rho g(H_1 + h_2)S_1. \qquad (10)$$

Наконец, рассмотрим ситуацию после наливания третьей порции воды:

$$2V_0 + V_0/3 = H_1S_1 + H_2S_2. \qquad (11)$$

Согласно закону Паскаля: $F_0 + \rho g(H_1 + H_2)S_1 = 5F_0$. Отсюда:

$$4F_0 = \rho g(H_1 + H_2)S_1. \qquad (12)$$

Решая полученную систему уравнений, найдём:

$$S_1 : S_2 = 3 : 1, \quad H_1 : H_2 = 3 : 5.$$

Критерии оценивания

Графическое решение:

Найдена зависимость $F(h)$ 2

Построен график с проведёнными прямыми 4

Аналитическое решение:

Записаны уравнения (1) – (6) (по балу за каждое уравнение) 6

Ответы:

Найдено отношение S_1 к S_2 1

Найдено отношение H_1 к H_2 3

10 класс

Задача 1. Шарик в сосуде с водой

Пусть плотности воды, деревянного и металлического шариков равны ρ, ρ_1 и ρ_2 соответственно, объёмы шариков – V_1 и V_2, расстояние от оси вращения до деревянного шарика R, силы натяжения верхней и нижней нитей T_1 и T_2, угловая скорость вращения ω.

1. Рассмотрим мысленно вместо деревянного шарика шарик из воды. На эти шарики действует одинаковая сила Архимеда (рис. 19).

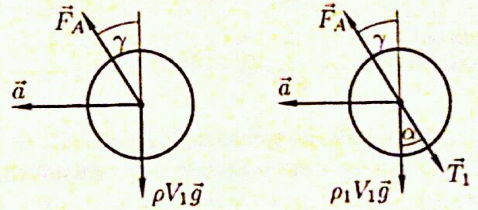


Рис. 19

Ускорение шариков $a = \omega^2 R$. По второму закону Ньютона в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:

$$F_A \sin\gamma = \rho V_1\omega^2 R, \quad F_A \sin\gamma - T_1 \sin\alpha = \rho_1 V_1\omega^2 R,$$

$$F_A \cos\gamma = \rho V_1 g, \quad F_A \cos\gamma - T_1 \cos\alpha = \rho_1 V_1 g.$$

Отсюда:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\omega^2 R}{g}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 R}{g}.$$

Итак, $\gamma = \alpha$, то есть получаем ответ на первый вопрос: сила Архимеда направлена под углом α к вертикали, то есть, вдоль нити.

2. Найдём горизонтальные и вертикальные составляющие сил Архимеда, действующих на шарики (рис. 20):

$$F_{A_1x} = \rho V_1\omega^2 R, \quad F_{A_1y} = \rho V_1 g,$$

$$F_{A_2x} = \rho V_2\omega^2 \cdot 3R, \quad F_{A_2y} = \rho V_2 g.$$

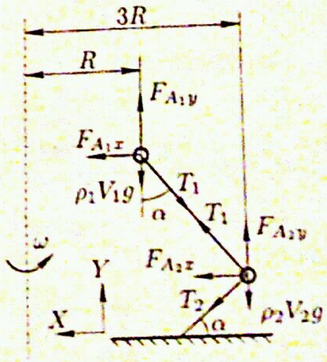


Рис. 20

По второму закону Ньютона:

$$\begin{cases} F_{A_1x} - T_1 \sin\alpha = \rho_1 V_1\omega^2 R, \\ F_{A_1y} - \rho_1 V_1 g - T_1 \cos\alpha = 0, \\ F_{A_2x} + T_1 \sin\alpha + T_2 \cos\alpha = \rho_2 V_2\omega^2 \cdot 3R, \\ F_{A_2y} - \rho_2 V_2 g + T_1 \cos\alpha - T_2 \sin\alpha = 0. \end{cases}$$

Из записанных уравнений находим:

$$\begin{cases} (\rho-\rho_1)V_1\omega^2 R = T_1\sin\alpha, \\ (\rho-\rho_1)V_1 g = T_1\cos\alpha, \\ (\rho_2-\rho)V_2\omega^2\cdot 3R = T_1\sin\alpha + T_2\cos\alpha, \\ (\rho_2-\rho)V_2 g = T_1\cos\alpha - T_2\sin\alpha. \end{cases}$$

Отсюда:

$$3\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{x\sin\alpha+\cos\alpha}{x\cos\alpha-\sin\alpha},\text{ где } x=\frac{T_1}{T_2}.$$

Зная α, находим:

$$x=\frac{T_1}{T_2}=\frac{19}{8}.$$

Критерии оценивания

Направление силы Архимеда, действующей на деревянный шарик:

Приведено объяснение 2

Найдено направление 1

Записана система уравнений Ньютона, описывающая движение системы ... 4

Найдено отношение сил натяжения 3

Задача 2. Тепловая машина

1. По теореме Карно

$$\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=\frac{T_1-T_2}{T_1};\qquad \frac{Q_1}{T_1}=\frac{Q_2}{T_2}.$$

Здесь Q_1 и Q_2 — количество теплоты, забираемое от нагревателя и передаваемое холодильнику соответственно.

$$Q_2=mq,\qquad Q_1=mq+A_{max}.$$

Следовательно:

$$A_{max}=mq\left(\frac{T_1}{T_2}-1\right)=2{,}45\cdot10^{13}\text{ Дж}.$$

2. Пусть в этом случае Q_2 — количество теплоты, перекаченное тепловым насосом в котёл, Q_1 — количество теплоты, забираемое от Гольфстрима.

$$\frac{Q_2}{T_0}=\frac{Q_1}{T_1},\qquad Q_2=\lambda m_в,\qquad Q_1=Q_2-A_{max}.$$

Отсюда:

$$\frac{\lambda m_в}{T_1}-\frac{\lambda m_в}{T_0}=\frac{A_{max}}{T_1},\qquad T_1<T_0.$$

Следовательно:

$$m_в=\frac{A_{max}}{\lambda\left(1-\dfrac{T_1}{T_0}\right)}=5{,}12\cdot10^7\text{ кг}.$$

Критерии оценивания

Записана теорема Карно для первого случая 3

Найдена максимальная работа в первом случае 2

Записана теорема Карно для второго случая 3

Определена максимальная масса испарённой воды во втором случае 2

Задача 3. Адиабатический процесс

Пусть при заполнении сосуда газом снаружи в сосуд перешёл газ, ранее занимавший объём V (рис. 21). Внешнее давление при "продавливании" внутрь этого объёма совершает работу $A_{внеш}=P_0V$.

Закон сохранения энергии для системы газ в сосуде — "внешний" газ объёма V — поршень выглядит так:

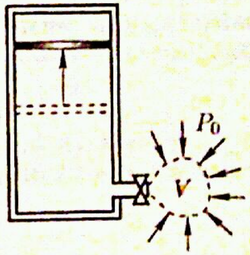


Рис. 21

$$U_1+U_2+A_{внеш}=U+\Delta E_п,\tag{13}$$

где U_1 — внутренняя энергия исходного газа в сосуде, U_2 — энергия "внешнего" газа из объёма V, U — энергия газа в сосуде после заполнения, $\Delta E_п$ — изменение потенциальной энергии поршня.

$$U_1=\frac{3}{2}\frac{P_0}{2}V_0;\quad U_2=\frac{3}{2}P_0V;\quad U=\frac{3}{2}P_02V_0;\tag{14}$$

$$\Delta E_п=mg\Delta h=\frac{P_0}{2}S\Delta h=\frac{P_0}{2}V_0.\tag{15}$$

Подставляя (14) и (15) в уравнение (13), после преобразований получим:

$$\frac{5}{2}P_0V=\frac{11}{4}P_0V_0,\tag{16}$$

$$V=\frac{11}{10}V_0.\tag{17}$$

Исходное число молей газа в сосуде $\nu_1 = \dfrac{P_0V_0}{2RT_0}$, число молей "внешнего" газа в сосуде $\nu_2 = \dfrac{11}{10}\dfrac{P_0V_0}{RT_0}$. Итого $\nu = \nu_1 + \nu_2 = \dfrac{8}{5}\dfrac{P_0V_0}{RT_0}$. Из уравнения состояния:

$$\frac{P_0 \cdot 2V_0}{RT} = \frac{8}{5}\frac{P_0V_0}{RT_0}, \tag{18}$$

откуда:

$$T = \frac{5}{4}T_0. \tag{19}$$

Критерии оценивания

Записан закон сохранения энергии 2
Получены выражения для U_1, U_2, U и $\Delta E_п$
(по баллу за каждую из формул) 4
Найден объём V закачанного газа 1
Записано уравнение состояния для газа,
находящегося в сосуде после установления равновесия 2
Определена конечная температура T газа 1

Задача 4. Слоистый диэлектрик

1. Пусть E_1 и E_2 — напряжённости однородных электрических полей в верхней и нижней пластинах соответственно. Тогда:

$$E_1\frac{d}{2} + E_2\frac{d}{2} = \mathscr{E}. \tag{20}$$

Здесь $E_1 d/2$ и $E_2 d/2$ — падения напряжений на слоях. По закону Ома:

$$E_1\frac{d}{2} = I_1\frac{1}{\lambda_1}\frac{d/2}{S}, \quad E_2\frac{d}{2} = I_2\frac{1}{\lambda_2}\frac{d/2}{S}, \tag{21}$$

где $I_1 = I_2$ — силы токов, текущих в 1-ом и 2-ом слоях, S - площадь пластин конденсатора. Поделив почленно эти соотношения, получим:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \tag{22}$$

Решая систему из двух уравнений (20) и (22), найдём:

$$E_1 = \frac{2\mathscr{E}}{d(1+\lambda_1/\lambda_2)}, \quad E_2 = \frac{2\mathscr{E}}{d(1+\lambda_2/\lambda_1)}. \tag{23}$$

Найдём теперь поверхностные плотности зарядов на пластинах конденсатора

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 E_1 = \frac{2\varepsilon_0\mathscr{E}}{d(1+\lambda_1/\lambda_2)}; \quad \sigma_2 = -\varepsilon_0 E_2 = -\frac{2\varepsilon_0\mathscr{E}}{d(1+\lambda_2/\lambda_1)}. \tag{24}$$

2. Полный заряд конденсатора, включающий заряды на пластинах и заряд в плоскости контакта слоёв, равен нулю. Пусть σ — поверхностная плотность заряда в плоскости контакта. Условие равенства нулю полного заряда:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma = 0. \tag{25}$$

Отсюда:

$$\sigma = -\sigma_1 - \sigma_2 = -\frac{2\varepsilon_0\mathscr{E}}{d}\left(\frac{1}{1+\lambda_1/\lambda_2} - \frac{1}{1+\lambda_2/\lambda_1}\right) = -\frac{2\varepsilon_0\mathscr{E}}{d}\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}. \tag{26}$$

Или, если выразить σ через удельные сопротивления:

$$\sigma = -\frac{2\varepsilon_0\mathscr{E}}{d}\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}. \tag{27}$$

Критерии оценивания

Указано соотношение между напряжённостями поля в конденсаторе
и напряжением на нём 1
Найдено соотношение между напряжённостями E_1 и E_2 поля
в диэлектрических слоях 1
Определена напряжённость E_1 поля в слое с проводимостью λ_1 1
Определена напряжённость E_2 поля в слое с проводимостью λ_2 1
Найдена поверхностная плоотность заряда σ_1 2
Найдена поверхностная плотность заряда σ_2 2
Найдена поверхностная плотность заряда в плоскости контакта слоёв 2

Задача 5. Перезарядка конденсаторов

1. Рассмотрим процессы перезарядки конденсаторов в первом цикле.

$$C_1U_1 + CU_2 = (C_1 + C)U_1'; \qquad U_1' = \frac{C_1U_1 + CU_2}{C_1 + C}.$$

$$C_2U_2 + CU_1' = (C_2 + C)U_2';$$

$$U_2' = \frac{C_2U_2 + C\dfrac{C_1U_1 + CU_2}{C_1 + C}}{C_2 + C} = \frac{C_2C_1U_2 + CC_2U_2 + C_1CU_1 + C^2U_2}{(C_1 + C)(C_2 + C)}.$$

$$\Delta U' = U_2' - U_1' =$$

$$= \frac{C_1C_2U_2 + CC_2U_2 + CC_1U_1 + C^2U_2 - C_1C_2U_1 - CC_2U_2 - CC_1U_1 - C^2U_2}{(C_1 + C)(C_2 + C)} =$$

$$= \frac{C_1C_2}{(C_1 + C)(C_2 + C)}(U_2 - U_1);$$

$$\frac{\Delta U'}{(\Delta U)_0} = \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C)(C_2 + C)} = A < 1$$

Таким образом, после каждого цикла разность напряжений на конденсаторах уменьшается в $\left(\frac{1}{A}\right)$ раз. После n циклов разность напряжений уменьшится в $\left(\frac{1}{A}\right)^n$ раз. По условию задачи

$$\left(\frac{1}{A}\right)^{44} = 100 \Rightarrow \frac{1}{A} = \left(1 + \frac{C}{C_1}\right)\left(1 + \frac{C}{C_2}\right) = \sqrt[44]{100} \approx 1{,}11.$$

Как видим, должны выполняться неравенства: $C \ll C_1$, $C \ll C_2$. Пренебрегая членами второго порядка малости относительно C/C_1 и C/C_2, можем записать:

$$\frac{1}{A} - 1 \approx C \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = 0{,}11.$$

Подставляя значения величин C_1 и C_2, получим:

$$C = 1\ \text{мкФ}.$$

2. После большого числа циклов напряжения на всех конденсаторах окажутся одинаковыми (U_∞) и их можно соединить параллельно. При этом заряд батареи конденсаторов равен первоначальному заряду конденсаторов:

$$C_1 U_1 + C_2 U_2 + C U_2 = (C_1 + C_2 + C)\, U_\infty,$$

$$U_\infty = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2 + C U_2}{C_1 + C_2 + C} = \frac{9U_1 + 10U_2}{19} = 136\ \text{В}.$$

3. $(W_э)_0 = \dfrac{C_1 U_1^2}{2} + \dfrac{(C_2 + C) U_2^2}{2} = \dfrac{18 \cdot (76)^2}{2} \cdot 10^{-6} + \dfrac{20 \cdot (190)^2}{2} \cdot 10^{-6} = 0{,}413$ Дж.

$$(W_э)_\infty = \frac{(C_1 + C_2 + C) U_\infty^2}{2} = \frac{38 \cdot (136)^2}{2} \cdot 10^{-6} = 0{,}351\ \text{Дж}.$$

На резисторе выделится тепловая энергия $Q = \Delta W_э$.

$$Q = \Delta W_э = (W_э)_0 - (W_э)_\infty = 0{,}062\ \text{Дж}.$$

Критерии оценивания

Записано выражение для U_1' 1
Записано выражение для U_2' 1
Получено выражение, связывающее $\Delta U'$ с ΔU 2
Определена ёмкость конденсатора C 2
Записан закон сохранения заряда для установившегося напряжения 2
Найдено установившееся напряжение 1
Определена тепловая энергия, выделившаяся на резисторе R 1

11 класс

Задача 1. Трифилярный маятник

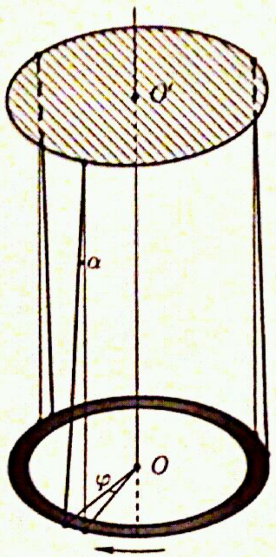


Рис. 22

1. Повернём кольцо относительно оси OO' на малый угол φ (рис. 22). Тогда все нити отклонятся на некоторый малый угол α. Из рисунка следует:

$$L\cdot\alpha = R\cdot\varphi, \text{ где } R \text{ — радиус кольца.}$$

При этом кольцо поднимется на

$$x = L(1-\cos\alpha) \approx L\frac{\alpha^2}{2} = \frac{R^2}{2L}\varphi^2.$$

Допустим, что в этом положении все точки кольца имеют скорость $v = R\dot{\varphi}$. Тогда полная энергия кольца запишется в виде

$$E = Mgx + \frac{Mv^2}{2} = M\left(\frac{R^2 g}{2L}\varphi^2 + \frac{R^2\dot{\varphi}^2}{2}\right). \quad (28)$$

При колебаниях без трения полная энергия сохраняется. Продифференцировав (28) по времени, получим:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\cdot\varphi = 0.$$

Это уравнение свободных колбаний. По аналогии с математическим маятником можно записать $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ — эта формула в точности совпадает с выражением для круговой частоты математического маятника длины L.

Окончательно находим:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

2. При наличии точечной массы в центре кольца выражение для кинетической энергии системы не изменяется, а в выражение для потенциальной энергии должна теперь входить сумма масс $(M+m)$. Уравнение для крутильных колебаний примет вид:

$$\ddot{\varphi} + \frac{(M+m)}{m}\frac{g}{L}\cdot\varphi = 0, \quad \text{следовательно} \quad \omega_0' = \sqrt{\frac{(M+m)}{M}\frac{g}{L}}.$$

При $m = M$ частота колебаний возрастёт в $\sqrt{2}$ раз, и, соответственно, период уменьшится в том же отношении.

Критерии оценивания

Записано соотношение между углом поворота кольца φ и углом отклонения нитей α от вертикали 1

Записано соотношение между высотой x подъёма кольца и углом φ его поворота 1

Записан закон сохранения энергии 2

Получено дифференциальное уравнение малых колебаний кольца 2

Найден период малых колебаний кольца 1

Указано, каким образом изменяются уравнения движения при добавлении точечной массы в центр кольца 1

Найдена циклическая частота колебаний для этого случая 1

Определено, во сколько раз изменился период колебаний 1

Задача 2. Заряженная частица в соленоиде

1. Магнитная индукция B в соленоиде определяется соотношением

$$B = \mu_0 I\cdot n = 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1\cdot 500 = 6{,}28\cdot 10^{-4}\ \text{Тл}.$$

Направление вектора индукции можно найти по правилу буравчика. В данном случае вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости рисунка от читателя.

На движущуюся заряженную частицу в магнитном поле действует сила Лоренца, направление которой можно найти по правилу левой руки. Так как частица отклоняется вправо, её заряд $q < 0$.

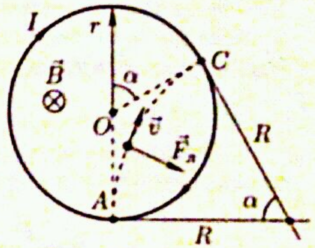


Рис. 23

2. В однородном магнитном поле заряженная частица движется по дуге окружности (рис. 23). При этом модуль вектора скорости остаётся неизменным:

$$\frac{mv^2}{R} = |q|Bv, \quad \text{или} \quad R = R_{\text{кривизны}} = \frac{mv}{|q|B}.$$

Радиус кривизны можно определить из геометрических соображений. Точки A и C находятся на пересечении двух окружностей радиусов r и R. Из соображений симметрии следует, что в точке C, также как и в точке A, вектор скорости частицы будет направлен вдоль радиуса витков катушки. Отсюда следует, что центр окружности, по которой движется частица (центр кривизны траектории), лежит на пересечении касательных в точках A и C.

Из рисунка следует:

$$R = r\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{3}r = 17{,}3\ \text{см}.$$

3. Модуль скорости частицы v определим из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = |q|U; \qquad v^2 = \frac{2|q|U}{m} = \left(\frac{|q|}{m}\right)^2 R^2B^2.$$

Откуда:

$$\frac{|q|}{m} = \frac{2U}{R^2B^2} = \frac{2\cdot 10^3}{(17{,}3)^2\cdot 10^{-4}\cdot(6{,}28)^2\cdot 10^{-8}} \approx 1{,}7\cdot 10^{11}\ \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}.$$

Примечание: Для электрона $\frac{e}{m} = 1{,}76\cdot 10^{11}\ \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$.

Критерии оценивания

Найдена магнитная индукция B в соленоиде 1
Указано, какой знак заряда имеет частица 2
Записано уравнение Ньютона для вращательного движения 2
Определён радиус кривизны траектории частицы внутри соленоида 1
Записан закон сохранения энергии для процесса ускорения электрона 2
Найден удельный заряд частицы 2

Задача 3. Устойчивость поршня

1. Пусть площадь сечения нижнего цилиндра $-$ S. Тогда объём, занимаемый гелием, равен $V = (L-h)S$. Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \nu RT \Rightarrow p(L-h)S = \nu RT. \tag{29}$$

Так как температура $T = const$ и площадь $S = const$, то $p(L-h) = const$. Отсюда следует, что другие положения равновесия можно найти из уравнения:

$$p_1(L-h_1) = p_2(L-h_2),$$

где $p_1 = p_0 + \rho_ж gh_1$, а $p_2 = p_0 + \rho_ж gh_2$.

$$(p_0 + \rho_ж gh_1)(L-h_1) = (p_0 + \rho_ж gh_2)(L-h_2). \tag{30}$$

Решая это квадратное уравнение, найдём $h_2 = 360$ мм.

2. Исследуем положения равновесия на устойчивость. Для этого сравним производные давления под поршнем ($p_{снизу}$) и над поршнем ($p_{сверху}$) по h. Устойчивое равновесие будет наблюдаться, если:

$$\frac{dp_{снизу}}{dh} > \frac{dp_{сверху}}{dh}. \tag{31}$$

$p_{сверху} = p_0 + \rho_ж gh$, следовательно: $\frac{dp_{сверху}}{dh} = \rho_ж g$.

$p_{снизу}(L-h) = const$, следовательно: $\frac{dp_{снизу}}{dh}(L-h) - p_{снизу} = 0$.

Следовательно:

$$\frac{dp_{снизу}}{dh} = \frac{p_{снизу}}{(L-h)}.$$

Подставим полученные производные в формулу (31):

$$\frac{p_{снизу}}{(L-h)} > \rho_ж g.$$

$$\frac{p_0 + \rho_ж gh}{(L-h)} > \rho_ж g. \tag{32}$$

Тогда устойчивое равновесие будет наблюдаться при:

$$L < \frac{p_0}{\rho_ж g} + 2h. \tag{33}$$

Для $h_1 = 380$ мм получаем $L < 1.52$ м, то есть равновесие устойчивое, а для $h_2 = 360$ мм $-$ $L < 1.48$ м, то есть равновесие неустойчивое.

Критерии оценивания

Получена связь между давлением под поршнем и высотой h 2
Найдено второе положение равновесия h_2 2
Получен критерий устойчивости положения равновесия (формула (5)) 4
Указана устойчивость верхнего положения равновесия 1
Указана устойчивость нижнего положения равновесия 1

Задача 4. Конденсатор с утечкой

1. В установившемся режиме сила тока $I = const$ при любом значении x. Выделим в среде слой x, dx. По закону Ома

$$dU = \rho\frac{dx}{S}I = I\rho_0\left(1 + \frac{2x}{d}\right)\frac{dx}{S}. \tag{34}$$

Здесь S $-$ площадь пластин конденсатора.

$$U_0 = \int dU = \frac{2I\rho_0 d}{S} = \frac{2I\rho_0\varepsilon_0}{C_0},\ \text{так как}\ C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Отсюда следует:

$$I = \frac{U_0C_0}{2\rho_0\varepsilon_0}. \tag{35}$$

2. Определим напряжённость электрического поля вблизи нижней (E_1) и верхней (E_2) пластин. Из (34) и (35) следует:

$$E(x) = \frac{dU}{dx} = \frac{I\rho}{S}\left(1+\frac{2x}{d}\right) = \frac{C_0\mathcal{E}_0}{2\varepsilon_0 S}\left(1+\frac{2x}{d}\right). \qquad (36)$$

При $x = 0$, $E_1 = \frac{C_0\mathcal{E}_0}{2\varepsilon_0 S}$,

$$q_1 = S\sigma_1 = SE_1\varepsilon_0 = \frac{C_0\mathcal{E}_0}{2}. \qquad (37)$$

При $x = d$, $E_2 = \frac{3C_0\mathcal{E}_0}{2\varepsilon_0 S}$,

$$q_2 = -S\sigma_2 = -SE_2\varepsilon_0 = -\frac{3C_0\mathcal{E}_0}{2}. \qquad (38)$$

3. Полный заряд конденсатора, включающий заряды обеих пластин и заряд в среде между пластинами, равен нулю:

$$q_1 + q_2 + q = 0.$$

Из этого соотношения следует:

$$q = C_0\mathcal{E}_0. \qquad (39)$$

4. Электростатическую энергию, запасённую в конденсаторе, найдём через объёмную плотность энергии $w_E = \varepsilon_0 E^2/2$:

$$W_E = \int w_E dV = \int_0^d \frac{\varepsilon_0 E^2(x)}{2} S dx = \frac{C_0\mathcal{E}_0^2}{8d}\int_0^d \left(1+\frac{2x}{d}\right)^2 dx = \frac{13}{24}C_0\mathcal{E}_0^2.$$

Критерии оценивания

Записано выражение для падения напряжения dU в слое толщиной dx 1
Записано выражение для полного напряжения на конденсаторе 1
Записано выражение для силы тока 1
Найдена зависимость напряжённости электрического поля от координаты $E(x)$ 1
Выведено выражение для заряда нижней пластины 1
Выведено выражение для заряда верхней пластины 1

Найдено выражение для суммы зарядов 1
Выведено выражение для заряда между обкладками конденсатора 1
Получено выражение для энергии конденсатора через объёмную плотность энергии 1
Определена величина энергии конденсатора 1

Задача 5. Плоский световод

Рассмотрим преломление лучей от источника на левом торце пластинки (рис. 24). Максимальный угол β_{max} преломления на левом торце соответствует углу падения $\alpha = 90°$:

$$\sin\beta_{max} = \frac{1}{n},$$

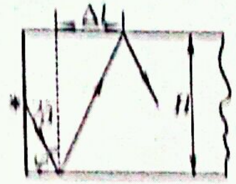


Рис. 24

Минимальный угол падения на боковую грань

$$\varphi_{min} = 90° - \beta_{max}.$$

Ход лучей в пластине будет зависеть от соотношения между φ_{min} и $\varphi_{пред}$ (предельный угол полного отражения).

Случай 1 $\varphi_{min} \geq \varphi_{пред}$ или $\sin\varphi_{min} \geq \sin\varphi_{пред} = \frac{1}{n}$.

В этом случае все лучи, падающие на боковые грани пластины, будут испытывать полное отражение и, следовательно, ни один луч не выйдет из пластины.

$$\sin\varphi_{min} = \cos\beta_{max} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \sqrt{n^2-1} \geq 1 \Rightarrow n \geq \sqrt{2}.$$

Минимальное расстояние (ΔL) между соседними отражениями лучей на противоположных гранях:

$$(\Delta L)_{min} = H\,\mathrm{tg}\,\varphi_{min} = H\frac{\cos\beta_{max}}{\sin\beta_{max}} = H\frac{(1/n)\sqrt{n^2-1}}{1/n} = H\sqrt{n^2-1}.$$

Максимальное число отражений $N_1 = (N)_{max}$:

$$N_1 = \left[\frac{L}{(\Delta L)_{min}} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{L}{H}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{2}\right].$$

Слагаемое 1/2 возникает из-за того, что перед первым отражением луч проходит вдоль трубы расстояние $\Delta L/2$.

При $n = n_1 = 1{,}73$ $N_1 =$ [illegible].

Случай 2 $\varphi_{min} \leqslant \varphi_{\text{пред}}$, или $\sin\varphi_{min} \leqslant \sin\varphi_{\text{пред}} = \frac{1}{n}$; $\frac{1}{n}\sqrt{n^2-1} \leqslant \frac{1}{n}$.

В этом случае

$$(\Delta l)_{min} = H\,\mathrm{tg}\,\varphi_{\text{пред}} = \frac{H}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Часть лучей, падающих на боковую грань под углами от φ_{min} до $\varphi_{\text{пред}}$, будут испытывать только частичное отражение и не дойдут до правого торца пластины.

Максимальное число отражений $N_2 = (N_2)_{max}$:

$$N_2 = \left[\frac{L}{(\Delta l)_{min}} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{L}{H}\sqrt{n^2-1} + \frac{1}{2}\right],$$

при $n = n_2 = 1{,}3$, $N_2 = 100 \cdot 0{,}83 = 83$.

Критерии оценивания

Записано выражение для угла полного отражения........................1
Указано, в каком из случаев свет частично выходит
из пластины через боковые грани..2
Определено, какой луч отразится максимальное количество раз
в первом случае...1
Определено, какой луч отразится максимальное количество раз
во втором случае..1
Получена формула для $(\Delta l)_{min}$ в первом случае.......................1
Получена формула для $(\Delta l)_{min}$ во втором случае.......................1
Найден ответ для N_{max} в первом случае...................................2
Найден ответ для N_{max} во втором случае...................................1

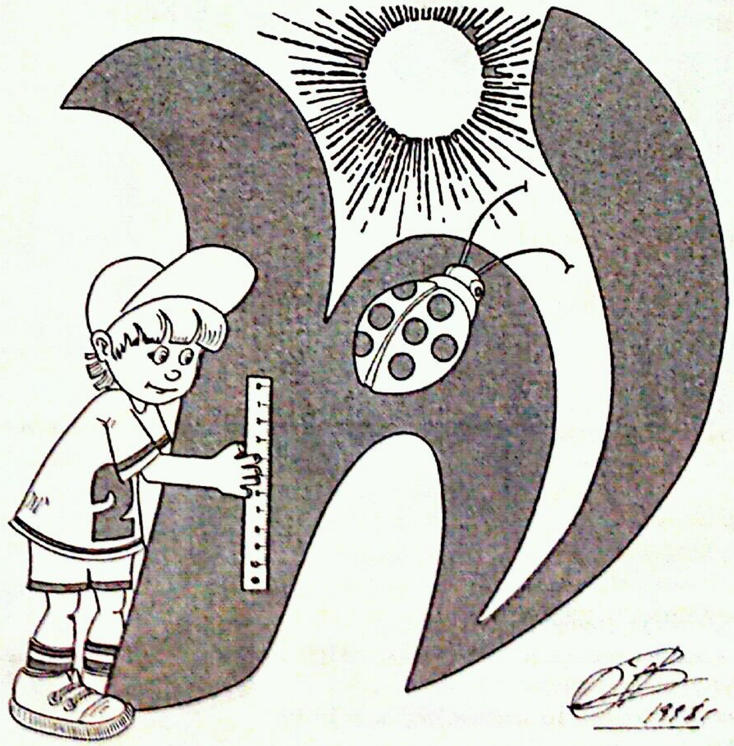
Методическая комиссия по физике
при центральном оргкомитете
Всероссийских олимпиад школьников

XLV Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Теоретический тур

Методическое пособие



Оренбург, 2011 г.