Школьный этап олимпиады по математике

Октябрь 2020 г.

11 класс

1 блок

1. На координатной плоскости нарисованы две фигуры. Первая задаётся неравенством $x^2 + y^2 \leqslant 4(x + y)$, а вторая $x^2 + y^2 \leqslant 2x$. Во сколько раз площадь первой фигуры больше площади второй?

Ответ: 8.

Решение. Неравенства можно переписать в виде $(x-2)^2+(y-2)^2 \leqslant 8$ и $(x - 1)^2 + y^2 \leqslant 1$. Значит, это круги, а их площади 8π и π.

2. Найдите наименьший корень уравнения

$$\sqrt{-x^4 + 5x^2 - 4} + \sqrt{-x^4 + 9x^2 - 20} = x^2 - 2x.$$

Ответ: 2.

Решение. Подкоренные выражения неотрицательны, когда $1 \leqslant x^2 \leqslant 4$ и $4 \leqslant x^2 \leqslant 5$. Поэтому ОДЗ состоит всего из двух чисел: -2 и 2. Удовлетворяет уравнению только второе. Поэтому у уравнения только один корень.

3. В десятичной записи числа $\dfrac{3}{13}$ стёрли две первые цифры после запятой. Представьте получившееся число в виде несократимой дроби. В ответ запишите её числитель.

Ответ: 1.

Решение. $\dfrac{3}{13} = 0{,}23\ldots$. Операция, описанная в условии задачи, сводится к следующему преобразованию

$$\left(\frac{3}{13} - \frac{23}{100}\right) \cdot 100 = \frac{1}{13}.$$

4. Представьте число $\operatorname{tg}(4 \operatorname{arctg} 2)$ в виде несократимой дроби. В ответ запишите знаменатель этой дроби.

Ответ: 7.

Решение. Пусть $\alpha = \operatorname{arctg} 2$. Тогда $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Дважды применив формулу тангенса двойного угла, получим $\operatorname{tg} 4\alpha = 24/7$.

5. На гранях куба записаны натуральные числа. Для каждой вершины подсчитали произведение чисел, записанных на гранях, которым она принадлежит. Сумма вычисленных произведений оказалась равной равна 6063. Найдите сумму чисел на гранях куба.

Ответ: 93.

Решение. Пусть на одной паре противоположных граней записаны числа x_1 и x_2, на другой y_1 и y_2, на третьей z_1 и z_2. Тогда сумма произведений равна

$$(x_1 + x_2)(y_1z_1 + z_1y_2 + y_2z_2 + z_2y_1) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2) = 6063.$$

Число $6063 = 3 \cdot 43 \cdot 47$ единственным образом (с точностью до порядка множителей) раскладывается в произедение трёх натуральных чисел, каждое из которых больше 1. Поэтому

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 3 + 43 + 47 = 93.$$

6. При каком наибольшем a система уравнений

$$\begin{cases} |x| = a - y, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$$

совместна (т. е. имеет хотя бы одно решение)?

Ответ: 4.

Решение. Нарисуйте графики уравнений.

7. В ребусе

$$\mathbf{А} < \mathbf{С} < \mathbf{Т} < \mathbf{Р} < \mathbf{О} < \mathbf{Н} > \mathbf{О} > \mathbf{М} > \mathbf{И} > \mathbf{Я}$$

разные буквы заменяют разные цифры. Сколько решений имеет ребус?

Ответ: 350.

Решение. В ребусе участвует 9 цифр из 10. Отсутствует одна цифра, которую можно выбрать 10 способами. Очевидно, что цифра **Н** — наибольшая, а **О** — вторая по величине из 9 цифр. Эти цифры определяются однозначно. Три последних буквы слова из 7 оставшихся цифр выбираются $C_7^3 = 35$ способами, после чего размещаются по убыванию. После этого на первых четырёх местах по возрастнию размещаются оставшиеся цифры. По правилу произведения, всего ребус имеет $10 \cdot 35 = 350$ решений.

8. ABC — остроугольный треугольник с углами $48°$, $65°$ и $67°$. Проведены высоты AD, BE, CF. Вокруг треугольника DEF описана окружность, к которой проведены касательные в точках D, E, F. Найдите (в градусах) наименьший угол треугольника, образованного этими касательными.

Ответ: $12°$.

Решение. Как следует из решения соответствующей задачи для 10 класса, углы треугольника DEF равны $84°$, $50°$ и $46°$. Применив результат соответствующей задачи из 9 класса, получим, что углы искомого треугольника равны $12°$, $80°$ и $88°$.

2 блок

1. На координатной плоскости нарисованы две фигуры. Первая задаётся неравенством $x^2+y^2 \leqslant 6(x+y)$, а вторая $x^2+y^2 \leqslant 2(x+y)$. Во сколько раз площадь первой фигуры больше площади второй?

Ответ: 9.

Решение. Неравенства можно переписать в виде $(x-3)^2+(y-3)^2 \leqslant 18$ и $(x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 2$. Значит, это круги, а их площади 18π и 2π.

2. Найдите наибольший корень уравнения

$$\sqrt{-x^4+1}+\sqrt{-x^4+4x^2-3} = x^4+x^3.$$

Ответ: -1.

Решение. Подкоренные выражения неотрицательны, когда $lex^2 \leqslant 1$ и $1 \leqslant x^2 \leqslant 3$. Поэтому ОДЗ состоит всего из двух чисел: -1 и 1. Удовлетворяет уравнению только первое. Поэтому у уравнения только один корень.

3. В десятичной записи числа $\dfrac{6}{17}$ стёрли две первые цифры после запятой. Представьте получившееся число в виде несократимой дроби. В ответ запишите её числитель.

Ответ: 5.

Решение. $\dfrac{6}{17} = 0{,}35\ldots$. Операция, описанная в условии задачи, сводится к следующему преобразованию

$$\left(\frac{6}{17}-\frac{35}{100}\right)\cdot 100 = \frac{5}{17}.$$

4. Представьте число $\cos(4\arccos\frac{1}{3})$ в виде несократимой дроби. В ответ запишите числитель этой дроби.

Ответ: 17.

Решение. Пусть $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$. Тогда $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Дважды применив формулу косинуса двойного угла, получим $\cos 4\alpha = 17/81$.

5. На гранях куба записаны натуральные числа. Для каждой вершины подсчитали произведение чисел, записанных на гранях, которым она принадлежит. Сумма вычисленных произведений оказалась равной равна 10797. Найдите сумму чисел на гранях куба.

Ответ: 123.

Решение. Пусть на одной паре противоположных граней записаны числа x_1 и x_2, на другой y_1 и y_2, на третьей z_1 и z_2. Тогда сумма произведений равна

$$(x_1+x_2)(y_1z_1+z_1y_2+y_2z_2+z_2y_1) = (x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2) = 10797.$$

Число $10797 = 3 \cdot 59 \cdot 61$ единственным образом (с точностью до порядка множителей) раскладывается в произедение трёх натуральных чисел, каждое из которых больше 1. Поэтому

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 3 + 59 + 61 = 123.$$

6. При каком наименьшем a система уравнений

$$\begin{cases} |x| = y - a, \\ x^2 + y^2 = 18. \end{cases}$$

совместна (т. е. имеет хотя бы одно решение)?

Ответ: -6.

Решение. Нарисуйте графики уравнений.

7. В ребусе

$$\textbf{Д} < \textbf{И} < \textbf{К} < \textbf{Т} < \textbf{А} > \textbf{Т} > \textbf{О} > \textbf{Р}$$

разные буквы заменяют разные цифры. Сколько решений имеет ребус?

Ответ: 1200.

Решение. В ребусе участвует 7 цифр из 10. Отсутствует три цифры, которые можно выбрать $C_{10}^3 = 120$ способами. Очевидно, что цифра **А** — наибольшая, а **Т** — вторая по величине наименьшая из 7 цифр. Эти цифры определяются однозначно. Две последние буквы слова из 5 оставшихся цифр выбираются $C_5^2 = 10$ способами, после чего размещаются по убыванию. Затем на первых четырёх местах по возрастанию размещаются оставшиеся цифры. По правилу произведения, всего ребус имеет $120 \cdot 10 = 1200$ решений.

8. ABC — остроугольный треугольник с углами 50°, 60° и 70°. Проведены высоты AD, BE, CF. Вокруг треугольника DEF описана окружность, к которой проведены касательные в точках D, E, F. Найдите (в градусах) наибольший угол треугольника, образованного этими касательными.

Ответ: 100°.

Решение. Как следует из решения соответствующей задачи для 10 класса, углы треугольника DEF равны 80°, 60° и 40°. Применив результат соответствующей задачи из 9 класса, получим, что углы искомого треугольника равны 20°, 60° и 100°.