

Школьный этап олимпиады по математике

Октябрь 2018 г.

9 класс

2 блок

1. Длина меньшего основания трапеции 5 см, а расстояние между серединами диагоналей 6 см. Какова длина (в см) большего основания?

Ответ: 17.

Решение. Если a — большее основание, b — меньшее, а c — расстояние между серединами диагоналей, то $c = \frac{a+b}{2} - 2 \cdot \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}$.

2. Свежие грибы содержат по массе 80% воды, а сухие — 20% воды. Сколько получится сухих грибов из 20 кг свежих грибов? Ответ введите в кг.

Ответ: 5.

Решение. Сухого вещества в свежих грибах 4 кг, что составит 80% в сухих грибах. Составив соответствующую пропорцию, найдём вес сухих грибов.

3. Артём, Толя и Федя участвовали в забеге на 1 км. (Считаем, что каждый из них бежал с постоянной скоростью). Артём на финише опередил Толю на 50 м. А Толя на финише опередил Федю на 40 м. Какое расстояние было между Артёмом и Федей в тот момент, когда финишировал Артём?

Ответ: 88 м.

Решение. Пусть скорости Артёма, Толи и Федей соответственно a , b и c м/с. Из условия следует, что $b = 0,95a$, $c = 0,96b$. Отсюда $c = 0,95 \cdot 0,96a = 0,912a$. Значит, когда Артём пробежит 1000 м, Федя преодолеет 912 м. Отставание составит 88 м.

4. Найдите 6-значное число, оканчивающееся на 28, которое уменьшится в 2 раза, если 28 перенести в начало числа.

Ответ: 571428.

Решение. Пусть a — число, полученное при зачёркивании последних двух цифр. Тогда $100a + 28 = 2(28 \cdot 10^4 + a)$. Отсюда $a = 5714$.

5. По кругу стоят 20 чисел. Известно, что сумма любых шести соседних чисел равна 30. Какое число на 12-м месте, если на 1-м месте стоит число 1?

Ответ: 9.

Решение. Пусть на i -м месте стоит число a_i ($i = 1, \dots, 20$.) Зафиксируем 5 подряд идущих чисел. Числа слева и справа от этой пятёрки должны совпасть. Поэтому $a_i = a_{i+6}$. Пойдём по кругу, отмечая одинаковые числа:

$$a_1 = a_7 = a_{13} = a_{19} = a_5 = a_{11} = a_{17} = a_3 = a_9 = a_{15} = a_1.$$

Теперь видно, что все числа на нечётных местах равны друг другу. То же верно для чисел на чётных местах. Значит, числа идут так:

$$x, y, x, y, \dots, x, y.$$

Из условия следует, что $3(x + y) = 30$, $x = 1$. Значит, на нечётных местах единицы, а на чётных девятки.

6. Найдите наибольший корень уравнения

$$|2x^3 + x - 18| = 2 - \sqrt{2x}.$$

Ответ: 2.

Решение. Очевидно, $x = 2$ — корень уравнения. Если же $x > 2$, правая часть уравнения меньше нуля, в то время как левая часть всегда неотрицательна.

7. Имеется множество $\{2, 3, 4, \dots, 13\}$. Сколько у него подмножеств (включая пустое и одноэлементные), в каждом из которых сумма каких двух чисел не равна 15?

Ответ: 729.

Решение. Рассмотрим пары чисел $(2, 13)$, $(3, 12)$, $(4, 11)$, $(5, 10)$, $(6, 9)$, $(7, 8)$. Из каждой пары мы можем включить в наше подмножество или первое число, или второе, или ни одного. Всего получается 3^6 комбинаций.

8. При каком наибольшем a система уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = 3; \\ ax + y = 2. \end{cases}$$

имеет решение в целых числах?

Ответ: 3.

Решение. Из системы находим $x = \frac{7}{2a+1}$. Отсюда $a \leq 3$. С другой стороны, при $a = 3$ получаем решение $x = 1$, $y = -1$.