Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников
по математике
2015-2016 учебный год
10 класс
Максимальный балл – 35

Решение задач

1. В классе 13 девочек и 12 мальчиков. На 8 марта каждый из мальчиков поздравил с праздником некоторых девочек. Могло ли оказаться так, что все мальчики поздравили одинаковое число девочек, но все девочки получили разное количество поздравлений?

Ответ: Не могло.

Решение. Девочка могла получить от нуля до 12 поздравлений. Если все девочки получили разное число поздравлений, то эти разные числа — в точности все целые от 0 до 12. Но их сумма равна $0+1+...+12 = 6\cdot 13$ не делится на 12. А должна бы, поскольку это и есть общее число поздравлений, сделанных мальчиками . Противоречие.

Оценивание: Полное решение — 7 баллов. Правильный ответ без обоснования - 0 баллов.

2. Внутри треугольника со сторонами 3, 4 и 5 взяли точку, и сосчитали сумму квадратов расстояний от этой точки до сторон треугольника. Найдите наименьшее возможное значение полученной суммы.

Ответ: 2.88

Решение. Соединив точку с вершинами треугольника, разрежем его на три маленьких. Пусть расстояния от точки до сторон треугольника равны x, y и z. Тогда удвоенные площади треугольничков будут равны 3x, 4y и 5z. Но удвоенная площадь большого треугольника равна 12 (он — прямоугольный, с катетами 3 и 4.). Получили, что

$$3x+4y+5z =12 \qquad (*)$$

Отсюда следует, что 12^2 меньше либо равно $(3^2 + 4^2 + 5^2)\cdot(x^2 + y^2+z^2)$, откуда и следует оценка. Равенство достигается при $x=3/12$, $y = 4/12$, $z = 5/12$.

Замечание. Обоснование использованного неравенства могло быть произведено следующими способами:

а) $3x+4y+5z$ - это скалярное произведение векторов (3,4,5) и (x,y,z). Поэтому оно не меньше произведения длин этих векторов.

б) А можно просто сказать, что это – неравенство Коши-Буняковского

в) Неотрицательность выражения $(x-3/12)^2 + (y-4/12)^2 + (z-5/12)^2$ после открытия скобок с использованием (*) также дает это неравенство.

Оценивание: Полное решение — 7 баллов. За частичное продвижение (задача сведена к рассмотренной экстремальной алгебраической задаче) — 2 балла. Не показано, что равенство достигается — снять 2 балла.

3. Известно, что квадратные уравнения $2015x^2 +px + q =0$ и $px^2 +qx + 2015 =0$ имеют общий корень. Найдите его.

Ответ: 1.

Решение. Умножим первое уравнение на x, и вычтем второе; получим $2015(x^3 - 1)=0$.

Отсюда находим x=1.

Оценивание: Полное решение — 7 баллов.

4. Докажите, что в любой арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, найдутся два члена с одинаковой суммой цифр.

Решение. Пусть a – первый член прогрессии, d – её разность. Пусть числа m и n имеют вид 10000000......1 (две единиц, а остальные — нули), и оба больше a. Тогда соответствующие члены прогрессии имеют вид d0000a, и сумма цифр у них одинакова.

Оценивание: Полное решение — 7 баллов. За частные примеры прогрессий с указанным свойством — баллы не давать.

5. Две окружности касаются в точке *A*. К ним проведена общая (внешняя) касательная, касающаяся окружностей в точках *C* и *B*. Докажите, что угол *CAB* равен 90^o.

Решение. Пусть общая касательная к окружностям, проходящая через точку A, пересекает прямую BC в точке D. Тогда DA=DB (как касательные из точки D к первой окружности) и DA=DB (аналогично). Значит, точки A,B и C лежат на окружности с центром D. Значит, наш угол опирается на диаметр.

Оценивание: Полное решение — 7 баллов.