**2017 год, октябрь. Школьный этап олимпиады по математике.**

**11 класс (решения)**

**1 блок**

1. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 6 см и 8 см. Расстояние между серединами хорд равно 5 см. Чему равен (в см) радиус окружности?

**Решение.** Пусть  и   – хорды из условия задачи. По свойству средней линии треугольника,  По теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник  прямоугольный. Радиус описанной вокруг него окружности равен половине гипотенузы.

1. Обнаружив в 64 метрах от себя уползающую черепаху, Ахиллес начал её

преследовать. Сократив расстояние до черепахи в 8 раз, он прекратил погоню.

Скорость Ахиллеса в 15 раз больше скорости черепахи. Какой путь (в метрах) проделал Ахиллес? *(*Ахиллес и черепаха двигались по одной прямой).

**Решение.** Пусть Ахиллес пробежал расстояние  Тогда черепаха за это же время преодолела расстояние  Следовательно,  

**3.** Найдите наибольшее значение , при котором  

**Решение.** После возведения в квадрат получим квадратное уравнение При этом нужно учесть, что (правая часть исходного уравнения неотрицательна). Поэтому уравнение имеет единственное решение 

**4.**  – это наименьшее из чисел  и . Найдите сумму корней уравнения   

**Решение.** Уравнение равносильно совокупности двух систем:

 и . Решения этих систем соответственно  1 и 2. Сумма корней равна 3.

**5.** Вычислите 

**Решение.** Пусть  Преобразуем исходное выражение:

** **



**6.** Найдите наибольший корень уравнения .

**Решение.** Перепишем уравнение в виде Получили, что сумма двух неотрицательных чисел равна нулю. Отсюда оба слагаемых равны нулю. Так будет только при  Это единственный корень уравнения.

**7.** Пусть  – некоторая функция. Известно, что уравнение имеет ровно один корень , а уравнение  не имеет корней. Найдите .

**Решение.** Пусть  – корень первого уравнения. Тогда число  также является его корнем. Из единственности корня получаем , откуда  Если бы число  входило в область определения функции , то оно было бы корнем второго уравнения. Значит, число 1 не входит в область определения функции . Поэтому условию задачи удовлетворяет только 

**8.**При каком наименьшем целом  значение квадратного трёхчлена  является квадратом простого числа?

**Решение.** Если значение квадратного трёхчлена равно  где  – простое число, то или  или Рассмотрение всех случаев показывает, что подходят только значения  и  Наименьшее из них 4.

**2 блок**

1. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 5 см и 13 см. Расстояние между серединами хорд равно 6 см. Чему равен (в см) диаметр окружности?

**Решение.** Пусть  и   – хорды из условия задачи. По свойству средней линии треугольника,  По теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник  прямоугольный. Диаметр описанной вокруг него окружности равен длине гипотенузы.

1. До приближающегося Ахиллеса оставалось ещё 6 метров, когда черепаха поняла, что ей не уйти от погони и обречённо остановилась. Какой путь (в метрах) с начала погони проделала черепаха, если её скорость в 17 раз меньше скорости Ахиллеса, расстояние между ними за время движения сократилось в 9 раз, и их движение происходило по одной прямой?

**Решение.** Пусть черепаха проползла расстояние  Тогда Ахиллес за это же время пробежал расстояние  В начальный момент времени расстояние между ними 54 м. Значит, расстояние уменьшилось на 48 м. Отсюда  и 

1. *баллов) 3*

**3.** Найдите наименьшее значение , при котором  

**Решение.** После возведения в квадрат получим квадратное уравнение При этом нужно учесть, что (правая часть исходного уравнения неотрицательна). Поэтому уравнение имеет единственное решение 

**4.**  – это наименьшее из чисел  и . Найдите сумму корней уравнения   

**Решение.** Уравнение равносильно совокупности двух систем:

 и . Решения этих систем соответственно 3 и 4. Сумма корней равна 7.

**5.** Вычислите 

**Решение.** Пусть  Преобразуем исходное выражение:

****



**6.** Найдите наименьший корень уравнения **.

**Решение.** Перепишем уравнение в виде  Первое слагаемое по модулю не больше 5. Поэтому 

откуда  Подстановка показывает, что число является корнем. А меньших корней нет! 

**7.** Пусть  – некоторая функция. Известно, что уравнение имеет ровно один корень , а уравнение  не имеет корней. Найдите .

**Решение.** Пусть  – корень первого уравнения. Тогда число  также является его корнем. Из единственности корня получаем , откуда Очевидно, что  – корень второго уравнения. Поэтому условию задачи удовлетворяет только 

**8.**При каком наибольшем целом  значение квадратного трёхчлена  является квадратом простого числа?

**Решение.** Если значение квадратного трёхчлена равно  где  – простое число, то или  или Рассмотрение всех случаев показывает, что подходят только значения  и  Наибольшее из них 12.