**Задания для 7 класса**

**Вариант 1.**

1. +В ряд стоят 31 рыцарей и лжецов, причем есть и те, и другие (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Каждый человек заявил, что рядом с ним стоит и рыцарь и лжец. Сколько всего рыцарей там стояло?
Ответ: 20
Решение: Рядом с рыцарем всегда стоит другой рыцарь, а по бокам от них по лжецу. Если эти лжецы не с краю, то чтобы соврать по другую сторону от рыцаря у них должен стоять снова рыцарь, рядом с которым еще рыцарь, и т.д. Двое крайних в ряду точно солгали – они лжецы, поэтому расстановка рыцарей и лжецов получается такая: Л Р Р Л Р Р Л … Р Р Л
2. +Количество точек на противоположных гранях игральной кости всегда равно 7. Четыре таких одинаковых кости составили в ряд так, как показано на картинке. Чему равно количество точек, скрытых между костями?
Ответ: 19

Решение: Из положения точек на верхней кости, получаем, что на верхней грани нижней кости стоит число 1. На гранях средних костей в сумме стоит 7+7. Верхняя кость даёт еще 4.

1. +Три мальчика собрали орехи. Количество орехов у Коли относится к количеству орехов у Димы, как 3:4. Количество орехов Димы относится к числу орехов Пети, как 5:3. Причем орехов у Коли на 102 больше, чем у Пети. Сколько орехов у Димы и Пети вместе?

Ответ: 1088

Решение:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Коля* | *3n* |  |
|  *Дима* | *4n* | *5k* |
| *Петя* |  | *3k* |

*Тогда 4n=5k тогда* $n=\frac{5}{4}k$*, 3n-3k=102, n-k=34, k=136*

*У Димы и Пети вместе 5k+3k=8k=1088*

1. +В шестизначном числе $1ЧИСЛО$ каждая буква обозначает цифру. Известно, что $1ЧИСЛО×3=ЧИСЛО1$. Найдите сумму Ч+И+С+Л+О.
Ответ: 26
Решение: Составляем уравнение $\left(100000+x\right)×3=10x+1$, где $x=ЧИСЛО$. Откуда находим нужное значение.
2. +Для какого наименьшего натурального числа $n$ дробь $\frac{n-10}{9n+11}$ является сократимой и ненулевой?
Ответ: $n=111$
Решение: Вычтем из знаменателя $9\left(n-10\right).$ Тогда полученная дробь $\frac{n-10}{101}$ опять будет сократимой.
3. +Из карточек с цифрами от 0 до 9 составили два пятизначных числа (каждая цифра использована ровно 1 раз). Найдите наименьшую возможную разность между двумя такими числами.
Ответ: 247
Решение: Старшие цифры должны отличаться на 1, иначе разность будет слишком большая. Остальные цифры необходимо выстроить так, чтобы у большего числа младшие 4 разряда образовывали как можно меньшее число, а у меньшего числа как можно большее. Откуда получаем пример 50123-49876. Причем цифры 6 и 9 переворачивать нельзя, каждая цифра используется один раз.
4. +Сколько существует четырехзначных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, делящихся на 9? (некоторые из этих цифр могут отсутствовать, а некоторые повторяться)
Ответ: 40
Решение: Сумма всех цифр не превышает 16, поэтому по признаку делимости на 9, она должна быть равна 9. Если в таком числе нет 1, то его цифры это 2, 2, 2, 3 – 4 варианта. Если единица ровно одна, то его цифры 1, 2, 2, 4 или 1, 2, 3, 3 – еще 24 варианта перестановок. Если единиц две, то его цифры 1, 1, 3, 4 – еще 12 вариантов.
5. +Декарт стоит в точке (0,0). Он может ходить на единичку вниз, вверх, влево или вправо, но не может повторять свой предыдущий ход. За какое наименьшее количество ходов Декарт может дойти до точки (314, 271)?
Ответ: 627
Решение: Декарт должен сделать как минимум 314 ходов право, но тогда количество вертикальных ходов не меньше 313, т.к. горизонтальные и вертикальные ходы чередуются. Несложно привести пример.

**Вариант 2.**

1. +По кругу стоят 31 рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Каждый человек заявил, что хотя бы один его сосед – лжец. Какое наибольшее количество лжецов там могло быть?
Ответ: 15
Решение: Так как по бокам от каждого лжеца должно стоять по рыцарю (иначе лжец бы не солгал, сделав заявление), то лжецов не больше половины. Пример на 15: два рыцаря рядом, а потом чередуются лжецы и рыцари.
2. +В каждый из кружочков диаграммы нужно вписать число от 1 до 9 (все по одному разу) так, чтобы на каждой прямой из трёх соединенных кружочков сумма чисел была 18. Известно положение числа 1 и 6. Чему равно $x$?

Ответ: 7

Решение. В одном ряду с 1 обязательно стоят 8 и 9. Поэтому $x\leq 7$. Сумма всех чисел 45, а сумма двух косых рядов, идущих слева направо плюс 1 и плюс 6 есть 43. Поэтому самое левое число это 2. Заметим, что $2+x+\left(8 или 9\right)=18$. Откуда $x\geq 7$. Значит $x=7$.

1. +Марат, Дима и Коля бегают с разными постоянными скоростями. Каждая пара бежит стометровку. В первом забеге, когда Марат пересёк финишную черту, Дима был в 20м позади. Во втором забеге, когда Дима добежал до финиша, то Коля был в 10м позади. В третьем забеге, когда Марат пересёк черту, то на сколько метров от него отстал Коля?

Ответ: 28

Решение: Пусть М, Д, К – скорости бегунов в м/с. Тогда $\frac{100}{М}×Д=80$, $\frac{100}{Д}×К=90$. Если перемножить эти два равенства и поделить на 100, то получим $\frac{100}{М}×К=72$, т.е. Коля отстанет на 100м-72м=28м.

1. +Известно, набор из чисел $\left(x-1\right); \left(3x-19\right); \left(38-5x\right); (7x-45)$ является перестановкой чисел $a, 2a, b, 2b$ для некоторых простых чисел $a$ и $b$, причем $x$ целое число. Какое наибольшее значение может принимать $x$?
Ответ: 7
Решение: Заметим, что если $x$ четно, то в наборе будет 3 нечетных числа – противоречие. Значит $x$ нечетно, но тогда в наборе 3 четных числа, поэтому одно из чисел $a$ или $b$ – это 2. Осталось перебрать 4 варианта, какое из чисел в наборе является двойкой. Решаем уравнения $\left(x-1\right)=2; \left(3x-19\right)=2; \left(38-5x\right)=2; \left(7x-45\right)=2$, целые решения 3 и 7, наибольшее 7.
2. +Из карточек с цифрами от 0 до 9 составили два пятизначных числа (каждая цифра использована ровно 1 раз). Найдите наименьшую возможную сумму таких двух чисел.
Ответ: 34047

Решение: Сумма наименьшая, если «старшие» цифры наименьшие, тогда это 1 и 2. Дальше 0 и 3, затем 4 и 5, затем 6 и 7, 8 и 9. Какая из цифр пары в каком числе, для суммы роли не играет. Ответ 34047. Причем цифры 6 и 9 переворачивать нельзя, каждая цифра используется один раз.

1. +Сколько существует четырехзначных чисел, делящихся на 11, составленных из карточек. с цифрами 1, 2, 3, 4, делящихся на 11? (каждая цифра встречается ровно 1 раз)
Ответ: 8
Решение: По признаку делимости на 11, сумма цифр на четных местах минус сумма цифр на нечетных должно делится на 11, но в нашем случае разность не превосходит 4+3-1-2=4, поэтому она должна быть равна 0. Значит на четных местах стоят 1 и 4, а на нечетных 2 и 3, или всё наоборот.
2. +Незнайка перемножил все числа меньшие 13. Найдите количество делителей $x$ полученного произведения таких, что $x×x$ также является делителем.

Ответ: 36

Решение. Обозначим произведение через $N$. Заметим, что в разложении на простые множители числа $N$ число 2 участвует в 10-ой степени, число 3 в 5, число 5 во 2-ой степени, а остальные в 1-ой. Поэтому в разложении искомых $x$ степень числа 2 от 0 до 5 (6 вариантов), степень числа 3 может быть 0, 1 или 2 (3 варианта), степень числа 5 – 0 или 1 (2 варианта), а других простых множителей нет. Перемножая варианты получаем 36.

1. +Декарт стоит в отмеченной жирной точке. Сколькими различными путями он может попасть в точку $C$ ровно за 5 ходов, если ему разрешено ходить только влево-вверх, вверх и вправо-вверх в центр соседнего по стороне шестиугольника.
Ответ: 20
Решение: Точка С расположена на 2 ряда шестиугольников правее, поэтому Декарту нужно сделать хотя бы два шага вправо-вверх. Легко видеть, что если таких ходов ровно 2 или не меньше 4, то в точку С за 5 шагов не попасть. Поэтому таких ходов ровно 3, еще один вертикальный и один шаг влево-вверх. Различных комбинаций из полученных ходов ровно 20.