

Муниципальный этап областной олимпиады школьников  
по математике

2020–2021 учебный год

Решения задач. Критерии оценивания

8 класс

1. Велосипедисты Петя, Влад и Тимур одновременно взяли старт разминочной гонки по круговой велодорожке. Их скорости равны соответственно 27 км/ч, 30 км/ч и 32 км/ч. Через какое наименьшее время они вновь окажутся в одной точке трассы? (Длина велодорожки 400 м.)

**Ответ:** 24 мин.

**Решение.** Влад едет быстрее Пети на 3 км/ч. Поэтому он обгонит его на круг (т. е. проедет на 400 м больше) через  $\frac{0,4}{3}$  ч = 8 мин. Тимур едет быстрее Влада на 2 км/ч. Поэтому он обгонит его на круг через  $\frac{0,4}{2}$  ч = 12 мин. Наименьшее общее кратное чисел 8 и 12 равно 24.

**Оценивание.** За верное решение 7 б.

2. Петя говорит, что если  $a^7$  делится на  $b^3$ , где  $a$  и  $b$  — натуральные числа, то  $a^2$  делится на  $b$ . Докажите, что он неправ, приведя опровергающий пример.

**Решение.** Простейший контрпример  $a = 8$ ,  $b = 128$ .

**Оценивание.** За верный пример 7 б.

3. Пусть  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — стороны треугольника. Докажите, что

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 < 4b^2c^2.$$

**Доказательство.** Пусть

$$D = (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2.$$

Нужно доказать, что  $D < 0$ . Разложим  $D$  на множители, применяя известные формулы сокращённого умножения:

$$\begin{aligned}(a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 &= (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) = \\ &= (a^2 - (b + c)^2)(a^2 - (b - c)^2) =\end{aligned}$$

$$= (a - (b + c))(a + b + c)(a + c - b)(a + b - c).$$

По неравенству треугольника, первая скобка отрицательна, а последние две положительны. Таким образом, дискриминант отрицателен.

**Оценивание.** За верное решение 7 б. За «решение», неявно предполагающее, что  $a^2 \geq b^2 + c^2$ , 2 б. Если же рассмотрен ещё и случай  $a^2 < b^2 + c^2$ , но от неравенства  $(b - c)^2 < a^2$  совершён переход к неравенству  $a > b - c$  (вместо  $a > |b - c|$ ), то 5 б.

4. В ребусе

$$\mathbf{K < O < P > O > H > A > B > I > P > Y > C}$$

разные буквы заменяют разные цифры. Сколько решений имеет ребус?

**Ответ:** 0.

**Решение.** Из ребуса следует, что  $\mathbf{P > O > P}$ . Так не может быть!

**Оценивание.** За верное решение 7 б.

5. Найдите все пары натуральных чисел  $n$  и  $m$ , для которых

$$(n + 1)(2n + 1) = 2m^2.$$

**Ответ:** их нет.

**Решение.** Поскольку  $2m^2 = (n + 1)(2n + 1) > 2n^2$ ,  $m > n$ . С другой стороны,  $2(n + 1)^2 > (n + 1)(2n + 1) = 2m^2$  и  $m < n + 1$ . Получилось, что  $n < m < n + 1$ . Это невозможно.

**Замечание.** Возможны и другие решения. Например, если рассмотреть уравнение как квадратное относительно  $n$ , то получим дискриминант  $16m^2 + 1$ , не являющийся квадратом при натуральном  $m$ . Ещё одно решение начинается с наблюдения о том, что  $n + 1$  и  $2n + 1$  — взаимно простые числа.

**Оценивание.** За верное решение 7 б.