

1 ТУР.

1. Ответ: -1. (2 б)

Заметим, что $1-2 = -1$, $-3+4 = 1$, $5-6 = 1$ и т.д. Разобьём наши числа на пары, тогда каждая нечетная пара даёт вклад в сумму -1 , а четная $+1$. Осталось посчитать число пар, так как чисел 2018, следовательно, пар 1009. Первые 1008 пар дадут в сумме 0 ($-1+1-1+1\dots$), а 1009 пара является нечетной и даст в сумму -1 .

2. Ответ: -6542. (2 б)

Фразу «наибольшее целое не превосходящее» нужно понимать так: нужно найти наибольшее целое число меньше или равное исходному. Ближайшим целым числом меньше $-6541,279$ является число -6542 . Число -6541 не подходит, так как оно БОЛЬШЕ исходного, а это противоречит определению.

3. Ответ: 200. (2 б)

Всего было 900 килограммов винограда. Так как в нём 80% влаги, следовательно, 20% - сухого вещества. 20% от 900 килограммов это 180 килограммов сухого вещества. После того как виноград высох количество сухого вещества не уменьшилось, то есть осталось 180кг. Так как 180 килограммов составляют 90% веса всего изюма не трудно посчитать, что общая масса изюма 200 килограммов.

4. Ответ: 22. (3 б)

Данное число должно делиться на 45, то есть на 5 и на 9 одновременно. Признак делимости на 5: число оканчивается на 0 или на 5. Признак делимости на 9: сумма цифр числа должна быть кратна 9.

а) Пусть на последнем месте стоит 0, тогда сумма цифр $6+3+7+0=17$. Имеем $6**370$, нужно подобрать 2 числа, чтобы сумма была кратна 18. Пусть эти 2 числа дают в сумме 1, то есть 2 комбинации (01 или 10). Теперь следующая сумма кратная 9 это 27, то есть сумма 2 наших цифр должна равняться 10 (так как 17 уже есть, надо ещё 10). 10 можно получить следующими комбинациями (55, 64, 46, 73, 37, 82, 28, 91, 19). Итого 11 комбинаций.

б) Пусть на последнем месте цифра 5, тогда сумма цифр $6+3+7+5=21$. Имеем число $6**375$. Первая сумма цифр кратная 9 это 27, то есть сумма наших двух неизвестных чисел должна равняться 6, а это следующие комбинации (33, 24, 42, 51, 15, 60, 06). Следующая сумма цифр кратная 9 это 36. От 21 до 36 не хватает 15. Тогда возможны следующие комбинации (96, 69, 87, 78). Сумму цифр 45 уже нет смысла рассматривать, так как максимальную прибавку к сумме 2 цифры могут дать 18 ($9+9$), а $21+18 < 45$. Итого 11 комбинаций.

Итого 22 комбинации всего.

5. Ответ: 927. (3 б)

Представим число $9**$ в следующем виде: $\overline{9xy}$, где x – количество десятков, y – количество единиц. После перестановки цифры 9 на последнее место получается число $\overline{xy9}$. В силу условия $900+10x+y-100x-10y-9$ равно либо 648, либо -648 . Из первого равенства получаем уравнение $10x+y=27$, так как числа x, y это количество

десятков и единиц, то они оба не более 9. Таким образом решение $x=2, y=7$. Получили число 927. Если же $900+10x+y-100x-10y-9=-648$, получим $10x+y=171$, а это уравнение допустимых решений не имеет.

6. Ответ: 1. (3 б)

От 1 до 9 всех цифр одинаковое количество. Заметим так же, что в промежутке от 10 до 99 всех цифр так же одинаковое количество. Аналогично получим, что в трехзначных числа так же цифры содержатся в одинаковом количестве.

Четырехзначные числа выписаны не все, а только от 1000 до 2018. Но это означает, что у нас единица встретится как минимум 1000 раз в то время как от 2000 до 2018 двойка будет встречаться всего 3 раза.

7. Ответ: 9. (3 б)

Пусть после игры осталось x целых шаров. Перепишем высказывания ребят. Вова: « $x \geq 5$ »(1), Саша: « $x < 5$ »(2), « $x \leq 7$ »(3), Катя: « $x : 2$ »(4). Высказывания (1) и (2) противоречивые. Значит одно из них точно верно, а другое неверно. Отсюда следует, что (3) и (4) точно неверны. То есть $x > 7$ и x нечетное. Значит 9 шаров остались целыми.

8. Ответ: 6. (4 б)

Если Вася первым ходом возьмет 7 яблок, то Петя, чтобы сразу не проиграть, возьмет из оставшихся 8 яблок 4. Вася не может взять оставшиеся 4 яблока, потому что Петя только что взял 4. Чтобы не проиграть на этом ходу, он берет 2 яблока. Пете остается взять 1 яблоко из оставшихся двух, и у Васи нет хода – он проиграл! Итак, 7 – плохое начало. Попутно мы выяснили, что если игроку достались 8 яблок и перед этим не было хода 4, то он выиграл. Если же перед этим был ход 4, то он, очевидно, проиграл. Значит, если игроку достались 12 яблок, то, беря 4, он ставит соперника в проигрышное положение. Итак, 12 яблок – выигрыш. Значит, Васе не нужно начинать игру с хода 3 – он предоставит выигрыш сопернику. Ясно также, что игрок, получивший 9 яблок, проиграл: после хода 1 он предоставляет сопернику выигрышную позицию 8, а после любого другого хода проигрывает немедленно. Значит, если Вася начинает с хода 6, то он поставит соперника в проигрышную ситуацию 9. Значит, 6 – верный ответ.

Мы выяснили, что 7 и 3 не подходят. Покажем, что не годятся и остальные возможные первые ходы: 5, 4, 2 и 1. Действительно, отвечая на каждый такой первый ход соответственно ходом 1, 2, 4 и 5, Петя ставит Васю в проигрышное положение 9.

2 ТУР.

1. Ответ: 408. (2 б)

Рассмотрим тройки чисел: $1+2-3=0$, $4+5-6=3$, $7+8-9=6$, и т.д. всего чисел 51 штука, значит они разобьются на 17 троек, где в каждой следующей сумма на 3 больше. Итого нужно найти сумму: $0+3+6+9+\dots+(49+50-51)$, а это и есть 408.

2. Ответ: -94. (2 б)

Наименьшее целое не меньшее X означает, что нужно найти минимальное число, которое больше или равно исходному, т.е. ответ -94, так как $-94 > -94,9392$.

3. Ответ: 5. (3 б)

Всего было 10 килограммов огурцов. Так как в них 60% воды, следовательно, 40% - сухого вещества. 40% от 10 килограммов это 4 килограмма сухого вещества. После того как огурцы высохли количество сухого вещества не уменьшилось, то есть осталось 4 килограмма. Так как 4 килограмма составляют 80% веса всех сухих огурцов, то не трудно посчитать, что общая масса сухих огурцов 5 килограммов.

4. Ответ: 7. (3 б)

Чтобы число делилось на 33, необходимо, чтобы оно делилось на 11 и на 3. Признак делимости на 3: сумма цифр делится на 3. Признак делимости на 11: если сумма цифр, стоящих в записи числа на чётных местах:

— равна сумме цифр, стоящих на нечётных местах;

— отличается от неё на 11.

Сумма цифр в исходном числе ($8*1*3$) равна $8+1+3=12$. Рассмотрим первое условие делимости на 11, т.е. сумма цифр на четных места равна сумме цифр на нечетных местах. Мы уже посчитали, что сумма цифр на нечетных местах равна 12, значит и сумма «звездочек» будет 12. 12 можно получить следующими комбинациями: 66, 57, 75, 86, 68, 97, 79. В силу того, что на нечетных местах сумма цифр 12 и на четных местах сумма цифр 12, то общая сумма 24 и она кратна 3, т.е. выполняется признак делимости на 3. Итого 7 штук.

Рассмотрим 2 условие: отличается от нее на 11. Т.е. либо сумма цифр на нечётных местах 1, но тогда общая сумма цифр будет 13 и не будет делимости на 3. Либо сумма цифр на нечетных местах равна 24, что невозможно, так как максимальная сумма двух цифр 18 ($9+9$).

Итого получаем только 7 комбинаций.

5. Ответ: 761 или 793. (3 б)

Представим число 7^{**} в следующем виде: $\overline{7xy}$, где x – количество десятков, y – количество единиц. После перестановки цифры 7 на последнее место получается число $\overline{xy7}$. В силу условия $700+10x+y-100x-10y-7$ равно либо 144, либо -144. Из первого равенства получаем уравнение $10x+y=61$, так как числа x , y это количество десятков и единиц, то они оба не более 9. Таким образом решение $x=6$, $y=1$. Получили

число 761. Аналогично из второго равенства получим уравнение $10x+y=93$ и число 793.

6. Ответ: 121. (3 б)

Решим задачу перебором. Рассмотрим числа от 1300 до 1399. В каждом таком числе 13 встречается один раз, кроме числа 1313 (в нем два раза). Всего чисел от 1300 до 1399 сто штук. Значит 13 встретится 100 раз и ещё один раз из числа 1313. Получили 101 запись. Рассмотрим вариант, когда 13 стоит в конце числа: 1013, 1113, 1213, 1413, 1513, 1613, 1713, 1813, 1913, 2013 (1313 не взяли, так как учли его в предыдущем случае). Получили ещё записей числа 13. Осталось рассмотреть вариант, когда 13 стоит в середине числа: 1130, 1131, 1132, 1133, 1134, 1135, 1136, 1137, 1138, 1139. Получили 10 вариантов. Итого $101+10+10=121$.

7. Ответ: 5. (3 б)

За сливовый сок хлопнули все. Трое, кто хлопнули за апельсиновый сок, точно хлопнули и за сливовый. Значит, они всегда лгут и любят яблочный. Аналогично семеро, кто хлопнули за яблочный сок – лгуны и любят апельсиновый. Причем эти трое и семеро точно разные группы ребят (их множества не пересекаются), ведь иначе они сказали бы правду. Тогда среди пятнадцати хлопнувших имеется трое лгунов, любящих яблочный и семеро других лгунов, любящих апельсиновый. Значит среди них еще пятеро, которые больше не хлопали и они могут быть только ребятами, которые всегда говорят правду.

8. Ответ: 8. (4 б)

Проанализируем игру с конца. Игра заканчивается, когда в папке остался 1 файл (0 сделать невозможно), значит 1 файл — это проигрышная позиция. Чтобы в папке остался 1 файл на предыдущем ходе в папке должно быть 2 файла (из 3 нельзя сделать 1 в силу условия). Получается, что 2 это выигрышная позиция, т.е. после нашего хода из этой позиции противник окажется в проигрышной позиции 1. Очевидно, что 3 является проигрышной позицией, так как из неё есть только один ход – удалить 1 файл, т.е. привести соперника в выигрышную позицию 2. А 4 является выигрышной позицией, так как существует ход которым мы приведем соперника в проигрышную позицию, таким ходом является удаление 1 файла (противник попадет в ситуацию в 3 файлами, а она разобрана выше). Рассуждая аналогично получим следующую схему выигрышных позиций (+ около числа означает выигрышная, - проигрышная):

1-, 2+, 3-, 4+, 5+, 6+, 7-, 8+, 9+, 10+, 11+, 12+, 13+, 14+, 15-, 16+, 17+, 18+, 19+, 20+, 21+, 22+, 23+.

Из схемы видно, что 23 является выигрышной позицией и поэтому первым ходом нужно отправить соперника в проигрышную позицию, то есть в 15, а это значит, что нужно удалить 8 файлов.