Муниципальный этап областной олимпиады школьников по математике

2020-2021 учебный год

11 класс. Решения и оценивание.

1. Существует ли 2020-значное число (не содержащее цифр 0 и 1), делящееся на сумму своих цифр?

Ответ. Да.

Решение. Например, таким является число 222…2223333444…4444 (454·4 двоек, 4 тройки, и 50·4 четверки, всего 2020 цифр). Сумма цифр этого числа равна 454·4·2+4·3+50·4·4=4444. Число делится на 1111 (оно составлено из блоков по 4 цифры) и на 4, и, значит, делится на сумму своих цифр.

Оценивание. Любое полное решение – 7 баллов. За правильный ответ (без примера) – 0 баллов. За правильный пример, но без обоснования делимости – снять 1-3 балла (в зависимости от сложности обоснования) .

2. Шахерезада рассказывает шаху математические сказки. Математическая сказка – это уравнение вида $ax + by = c$, где $a, b, c -$ натуральные числа в пределах от 1 до 17 (включительно). Сказка – печальная, если у соответствующего уравнения нет решений в целых числах (например, сказка $2x + 4y = 7$ – печальная, а сказка $3x + 5y = 2$ – нет: у этого уравнения есть решение $x = -1, y = 1$). Сможет ли Шахерезада придумать 1001 различных печальных сказок?

Ответ: сможет.

Решение. Печальными будут следующие сказки:

а) a и b – четные, c – нечетное. Таких сказок 8·8·9=576.

б) a и b делятся на 3, c – не делится на 3. Таких сказок 5·5·12. Но надо учесть пересечение с а): a и b делятся на 6, с нечетно, не делится на 3. Таких сказок 2·2·6=24.

Итого а) и б): 576+300-24=852

в) a и b делятся на 5, c не делится на 5: таких 3·3·14=126. Однако из них уже посчитаны 1·1·7 в а), и 1·1·10 – в б). Всего новых - 109

г) Сказки вида a=b=p, c≠p, где p – одно из чисел 11,13, 17. Всего таких 3·16=48.

Итого, уже есть 852+109+48=1009.

Оценивание. Полное решение- 7 баллов. За ошибки, связанные с наложением серий, и арифметические ошибки – снять 1-3 балла, в зависимости от их фатальности

3. Коля и Оля ставят на доску размера 5×5 слонов так чтобы они не били друг друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Первым ходит Коля, однако ему запрещено своим первым ходом ставить слона в центр доски. Кто выиграет при наилучших действиях сторон?

Ответ: выиграет Коля.

Решение. Будем использовать шахматную раскраску доски (центр - черный). Коля может первый ход сделать, например, в клетку c1. В дальнейшем, при ходе Оли в белую клетку, Коля отвечает центрально-симметрично (такой ход будет допустим; положение слонов на белых клетках будет после этого симметричным, что позволит Коле и дальше продолжать использовать «бело-симметричную» стратегию). Ну, а «черных» ходов будет сделано всего 2: на ход c3 Коля ответит c5 (и наоборот), при ходе в угловую клетку – Коля ответит ходом в неугловую клетку на другой «черной» диагонали (и наоборот).

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. За пробелы в обосновании выигрышной стратегии – снять 1-2 балла. За правильный ответ без обоснования – 0 баллов.

Замечание. Возможны и другие выигрывающие стратегии. Однако первый ход в угол – проигрывает.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $x\sqrt{4-y^2}+y\sqrt{9-x^2}$.

Ответ: 6 и -6.

Решение. Из ОДЗ следует, что x по модулю не превышает 3, а y – по модулю – не превышает 2.

Поэтому $x = 3sin\alpha, y = 2sin\beta$ для некоторых углов α и β. Но тогда все выражение равно (по формуле для синуса суммы) $6\sin(\alpha+\beta)$, и, значит, не превышает (по модулю) 6. Равенство достигается при y=0 и x=3 (x=-3) .

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. Возможны и прямые решения – их, конечно, следует засчитывать.

5. В треугольнике АВС (угол В - тупой) провели высоту ВН и биссектрису АК. Найдите угол АКВ, если угол КНС равен 45^o.

Ответ: 45^o.

Решение. Точка К равноудалена от прямых АВ и АС (так как АК -биссектриса), и от прямых НВ и НС (т.к. НК – биссектриса прямого угла). Поэтому точка К равноудалена от прямых АВ и ВН. Значит, ВК – биссектриса угла, внешнего к углу АВН. Поэтому угол НВС равен половине этого внешнего угла: 90^o- С=$\frac{1}{2}(A+90^0)$, откуда $C+\frac{1}{2}A=45^0$. Но это как раз и есть искомый угол АКВ (он – внешний в треугольнике АКС).

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. За «тригонометрическое» решение – полный балл. За правильно составленное, но не решенное уравнение – 2 балла. За правильный ответ (без решения) – 0 баллов.