Муниципальный этап областной олимпиады школьников по математике
2018–2019 учебный год

Решения задач. Критерии оценивания

8 класс

1. Шесть бобров способны построить плотину за 6 дней. Когда они проработали 2 дня, выяснилось, что из-за надвигающегося паводка им надо закончить работу на день раньше, чем планировалось ранее. Сколько бобров им нужно позвать себе на помощь?

Ответ: 2.

Решение. Будем называть объём работы, которую выполняет один бобёр за один день, трудоднём. Шести бобрам оставалось работать 4 дня, поэтому объём оставшейся работы равен 24 трудодням. За три дня такую работу выполнят 8 бобров. Значит, на помощь следует позвать двух бобров.

Оценивание. За верное решение 7 баллов.

2. Сумма нескольких чисел равна 2. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,1?

Ответ: может.

Решение. Пример. Возьмём сто чисел, равных 0,02. Сумма их квадратов равна $100 \cdot 0{,}0004 = 0{,}04 < 0{,}1$.

Оценивание. За верное решение 7 баллов.

3. Найдите натуральные числа a, b и c, если известно, что наименьшее общее кратное (НОК) чисел a и b равно 9800, $\text{НОК}(a, c) = 2200$, $\text{НОК}(b, c) = 539$.

Ответ: $a = 200$, $b = 49$, $c = 11$.

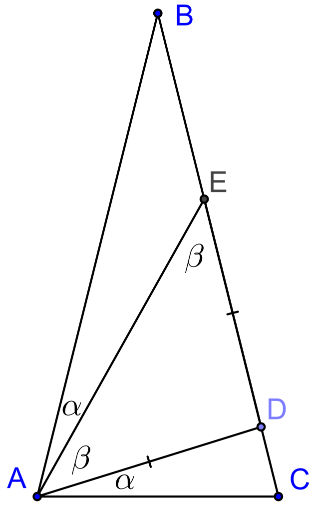
Решение. Число c является делителем чисел $2200 = 11 \cdot 2 \cdot 10^2$ и $539 = 7^2 \cdot 11$, наибольший общий делитель которых равен 11. Поэтому c делит 11. Если $c = 1$, то $a = 2200$, $b = 539$, но тогда их НОК не будет равен 9800. Значит, $c = 11$. Поскольку a и b не делятся на 11, они взаимно просты с c и $\text{НОК}(a, c) = ac$, $\text{НОК}(b, c) = bc$, откуда и находим a и b.

Оценивание. За верное решение 7 баллов. Если ответ угадан, но не доказано, что нет других решений, 2 балла.

4. ABC — равнобедренный треугольник ($AB = BC$). На стороне BC выбрана точка D, а на отрезке BD — точка E. Известно, что $AD = DE$ и $\angle DAC = \angle BAE$. Найдите $\angle EAC$.

Ответ: 60°.

Решение. Обозначим $\alpha = \angle DAC = \angle BAE$, $\beta = \angle EAD$.



Тогда из треугольника EDA имеем $\angle DEA = \beta$, а из треугольника ABE находим $\angle ABE = \beta - \alpha$. Значит, в треугольнике ABC углы $\angle A = \angle C = 2\alpha + \beta$, $\angle B = \beta - \alpha$. После суммирования этих углов получим $3\alpha + 3\beta = 180°$, или $\alpha+\beta = 60°$. Осталось заметить, что искомый угол $\angle EAC = \alpha+\beta$.

Оценивание. За верное решение 7 баллов.

5. По кругу выписаны в некотором порядке числа от 1 до 99. Каково наибольшее возможное число троек рядом стоящих чисел, сумма которых чётна?

Ответ: 97.

Решение. Пронумеруем места по часовой стрелке числами от 1 до 99.

Всего имеется 99 троек рядом стоящих чисел. Пусть N — максимальное число троек с чётной суммой.

I. Покажем, что $N \neq 99$.

Если сумма чисел в каждой тройке чётна, то одинаковой чётности должны быть числа, стоящие а) на местах с номерами 1, 4, 7, …, 97; б) на местах с номерами 2, 5, 8, …, 98; в) на местах с номерами 3, 6, 9, …, 99. В каждой из трёх групп по 33 числа. Поскольку у нас 50 нечётных и 49 чётных чисел, указанная ситуация невозможна.

II. Покажем, что $N \neq 98$.

Если нечётная сумма только в одной тройке, то сумма по всем тройкам тоже нечётна, но эта сумма в три раза больше суммы всех чисел (поскольку каждое число входит в три тройки) $(1+2+\ldots+99) = 50\cdot 99$, а последняя чётна.

II. Приведём пример, когда $N = 97$.

Ставим на первых 24 местах чётные числа, затем 25 троек, в которых за чётным числом идёт два нечётных. Получится всего две тройки с нечётной суммой: на местах 24–26 и 99, 1, 2.

Оценивание. За верное решение 7 баллов. Если есть только пример — 3 балла. Если только доказано, что троек не больше 97, 3 балла. Если только доказано, что троек не больше 98, 1 балл. Если есть пример и доказано только, что троек не больше 98, 4 балла.