

Очный тур «Кубок главы города»

6 класс

1. Написано 2022-значное натуральное число. Каждое двузначное число, образованное соседними цифрами этого числа, идущими в той же последовательности, делятся на 19 или на 31. Последняя цифра написанного числа - 2. Какая цифра первая?

Ответ. 1.

Решение. Выпишем двузначные числа, которые делятся на 19 и на 31: 19, 38, 57, 76, 95, 31, 62, 93. Начнем восстанавливать цифры 2022-значного числа с конца: 2, 6, 7, 5, 9, 1, 3, 9, ... Заметим, что дальше 3 цифры (9, 1, 3) будут повторяться. $(2022 - 4) : 3 = 672$ (ост. 2). Тогда первой цифрой данного числа будет 2-я цифра цикла, т.е. 1.

2. В коробке 30 конфет – внешне одинаковых, но с разными начинками: 13 – с карамелью, 9 – с вишней и 8 – с орехами. Какое наибольшее количество конфет может съесть из коробки Лёша, чтобы в коробке оставались по крайней мере 7 конфет какого-то одного вида и 4 конфеты другого вида?

Ответ. 10.

Решение. Если взять 5 конфет с орехами и 6 конфет с вишней, то в коробке не останется семи конфет одного типа и четырёх другого. Значит, 11 конфет Лёша взять не может. Пусть Лёша возьмёт произвольные 10 конфет. Невозможно, чтобы среди них одновременно нашлись 7 конфет с карамелью, 3 – с вишней и 2 – с орехами. Значит, точно есть какой-то вид конфет, которых в коробке осталось хотя бы 7. Рассмотрим два оставшихся вида. На столе вначале лежало по крайней мере $8+9=17$ этих двух видов. Взято не более 10 из них, значит, осталось не менее 7. По принципу Дирихле есть хотя бы 4 конфеты одного из этих двух видов. Условие задачи выполнено.

3. Когда к дому квадратной формы сделали квадратную пристройку, его периметр увеличился на 10%. На сколько процентов увеличилась площадь дома?



Ответ. 4.

Решение: Одна сторона дома составляет $100:4=25\%$ периметра. Периметр увеличился на 10% – это 2 стороны квадратной пристройки, тогда одна сторона 5%. Таким образом, сторона пристройки в 5 раз меньше стороны дома ($25\%:5\%=5$), а площадь пристройки в 25 раз меньше площади дома, и составляет 4% его площади.

4. Для чаепития расставили парты так, что образовался стол на 20 мест - 10 с одной стороны и 10 с другой, напротив. Сколькими способами за этим столом можно рассадить 4 девочки и 9 мальчиков, если девочки не должны сидеть напротив друг друга?

Ответ. $20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$.

Решение. Посадим сначала девочек по требованию задачи. Первую девочку можно посадить на 20 мест, значит количество способов 20, вторую девочку мы можем посадить на любое свободное место, кроме того, что находится напротив первой девочки, значит таких мест осталось: $20 - 1 - 1 = 18$, значит вторую девочку можно посадить за стол 18 способами. Заметим, что после того, как за стол садится одна девочка, количество мест уменьшается на два. Поэтому посадить третью: 16 способами, четвертую: 14. Когда все девочки будут сидеть за столом останется $20 - 4 = 16$ мест для мальчиков. Первого мальчика можно посадить 16 способами, второго – 15, третьего – 14, четвертого – 13, пятого – 12, шестого – 11, седьмого – 10, восьмого – 9, девятого –

8. Поскольку, при выборе одного места существует несколько выборов другого, то все варианты нужно перемножить: $20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$.

5. Петя и Вася играют в игру: по очереди выкладывают спички на стол. Начинает Петя. В начале стол пуст. За ход можно положить 1, 2, 10 или 20 спичек. Победит тот, после чьего хода на столе окажется более 200 спичек. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ. Победит Вася.

Решение. Опишем его выигрышную стратегию: заметим, что 1, 2, 10, 20 при делении на 3 дают остатки 1, 2, 1, 2 соответственно. Тогда если на момент Васиного хода на столе лежит не более 180 спичек, то он дополняет это количество до ближайшего сверху числа, которое делится на 3, выложив на стол, в зависимости от остатка, 1 или 2 спички (в дальнейшем мы покажем, почему на момент Васиного хода на столе не может лежать количество спичек, кратное 3), если же количество спичек больше 180, то Вася кладёт 20 спичек и выигрывает. Покажем, что такая стратегия действительно выигрышная. Заметим, что если после хода Пети на столе лежит не более 180 спичек, то и после следующего за ним хода Васи количество спичек не превысит 180. Это следует из того, что после хода Пети на столе не могло быть ровно 180 спичек, так как 180 кратно 3, а кратное 3 количество образуется только после ходов Васи (так как он всё время дополняет до кратного 3, а среди доступных ходов нет хода с остатком 0 при делении на 3), а если на столе было меньше 180 спичек, то после Васиного дополнения станет не более 180, опять же из-за того, что 180 делится на 3. Так как игра конечна, то в какой-то момент на столе станет больше 180 спичек. Как мы уже выяснили, это будет после хода Пети. Заметим, что если на предыдущем ходу было $x \leq 180$ спичек, а стало $y > 180$ спичек, то y принимает значения от 181 до 200, то есть Петя не побеждает этим ходом, а Вася следующим победит, если добавит 20 спичек.