Школьный этап олимпиады по математике

Октябрь 2020 г.

9 класс

1 блок

1. Одну сторону прямоугольника увеличили на 30%, а другую уменьшили на 20%. На сколько процентов увеличилась площадь прямоугольника?

Ответ: 4.

Решение. Пусть длины сторон x и y. Тогда в новом прямоугольнике длины сторон $1{,}3x$ и $0{,}8y$.

2. В большом ящике лежат шарики разных цветов: 5 красных, 6 оранжевых, 7 жёлтых, 8 зелёных, 9 голубых, 10 синих и 11 фиолетовых. Шарики вынимают из ящика в полной темноте. Какое минимальное число шариков нужно достать, чтобы среди них гарантированно нашлось 8 шариков одного цвета?

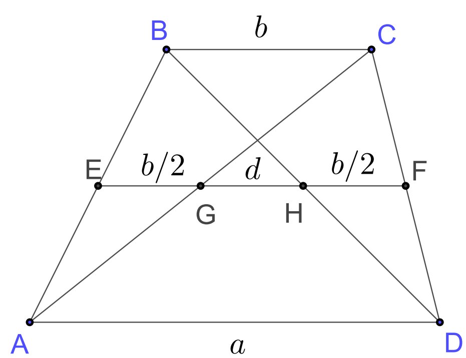
Ответ: 47.

Решение. Возьмём максимальное число шаров каждого цвета, меньшее восьми. Будет взято $5+6+7+7+7+7+7 = 46$ шариков. Добавление любого шарика даст восьмёрку шариков какого-то цвета.

3. Длина большего основания трапеции равна 17 см, а расстояние между серединами диагоналей 3 см. Найдите длину меньшего основания трапеции (в см).

Ответ: 11.

Решение. Если большее основание a, а меньшее b, то в обозначениях рис.



расстояние между серединами диагоналей трапеции равно

$$d = GH = EF - (EG + HF) = \frac{a+b}{2} - \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\right) = \frac{a-b}{2}.$$

Отсюда $b = a - 2d$.

4. В десятичной записи числа 2021^{2020} найдите предпоследнюю цифру.

Ответ: 0.

Решение. При перемножении натуральных чисел на две последние цифры произведения влияют только по две последние цифры множителей. Выпишем последовательность цифр в двух младших разрядах для степеней числа 21: 21, 41, 61, 81, 01, 21,$\ldots$. Эта последовательность имеет период 5.

5. При каком наибольшем a система уравнений

$$\begin{cases} |x| = y - a, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

совместна (т. е. имеет хотя бы одно решение)?

Ответ: 3.

Решение. Нарисуйте графики уравнений.

6. Найдите наименьшее натуральное число, которое после зачёркивания первой цифры уменьшается в 73 раза.

Ответ: 9125.

Решение. Искомое число запишем в виде $a = k \cdot 10^n + m$, где k — первая цифра числа, а $m < 10^n$ — число, получающееся после зачёркивания первой цифры. Тогда $k \cdot 10^n + m = 73m$ и $k \cdot 10^n = 72m$. Так как $72m$ делится на 9, цифра k равна 9. Ясно, что $n \geqslant 3$. Наименьшее число, удовлетворяющее условию задачи, получится при $k = 9$ и $n = 3$, при этом $m = 125$.

7. В ребусе

$$\mathbf{М} < \mathbf{А} > \mathbf{Ш} < \mathbf{И} > \mathbf{Н} > \mathbf{А}$$

разные буквы заменяют разные нечётные цифры. Сколько решений имеет ребус?

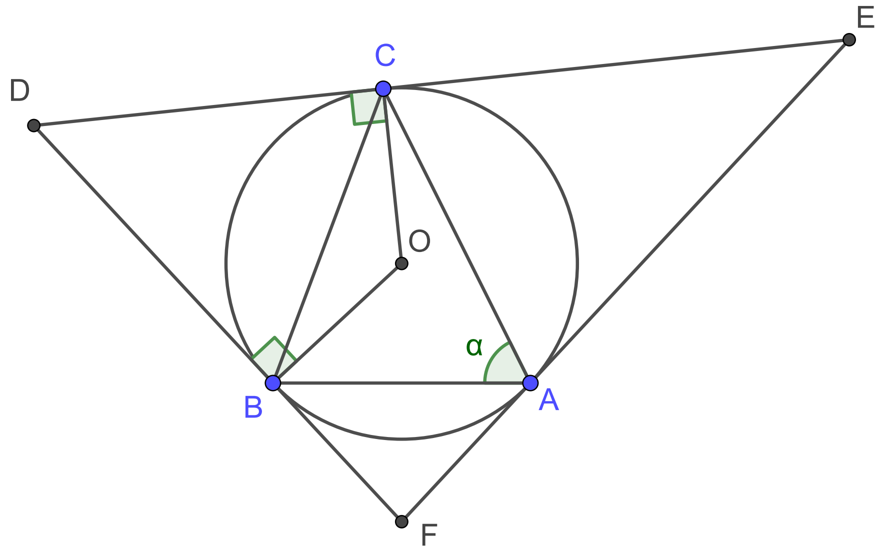
Ответ: 2.

Решение. В ребусе участвует 5 цифр. По условию, все они нечётные. Поскольку **И** $>$ **Н** $>$ **А**, а **А** больше двух оставшихся цифр, имеем **И** $= 9$, **Н** $= 7$, **А** $= 5$. Букву **М** теперь выбираем из двух оставшихся цифр (1 и 3), после чего буква **Н** определяется однозначно.

8. Вокруг треугольника ABC с углами $31°, 77°, 82°$ описали окружность, к которой провели касательные в точках A, B и C. Найдите наименьший угол (в градусах) треугольника, образованного этими касательными.

Ответ: $16°$.

Решение. Пусть O — центр описанной окружности, DEF — треугольник, образованный касательными (см. рис.), $\angle BAC = \alpha$.



Центральный угол в два раза больше вписанного, опирающегося на ту же дугу. Поэтому $\angle BOC = 2\alpha$. В четырёхугольнике $ABDC$ есть ещё два прямых угла (между касательной и радиусом). Отсюда $\angle BDC = 180° - 2\alpha$. Аналогично находятся два других угла треугольника DEF.

2 блок

1. Одну сторону прямоугольника увеличили на 10%, а другую уменьшили на 40%. На сколько процентов уменьшилась площадь прямоугольника?

Ответ: 34.

Решение. Пусть длины сторон x и y. Тогда в новом прямоугольнике длины сторон $1{,}1x$ и $0{,}6y$.

2. В большом ящике лежат шарики разных цветов: 6 красных, 6 оранжевых, 7 жёлтых, 7 зелёных, 8 голубых, 8 синих и 9 фиолетовых. Шарики вынимают из ящика в полной темноте. Какое минимальное число шариков нужно достать, чтобы среди них гарантированно нашлось 8 шариков одного цвета?

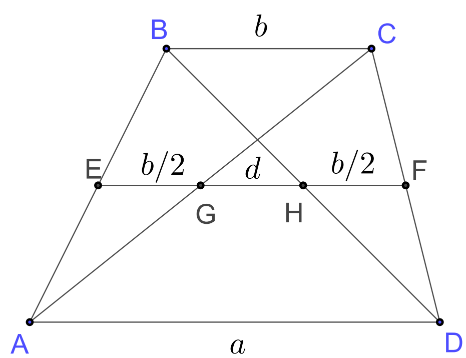
Ответ: 48.

Решение. Возьмём максимальное число шаров каждого цвета, меньшее восьми. Будет взято $6+6+7+7+7+7+7=47$ шариков. Добавление любого шарика даст восьмёрку шариков какого-то цвета.

3. Длина большего основания трапеции равна 7 см, а расстояние между серединами диагоналей 2 см. Найдите длину меньшего основания трапеции (в см).

Ответ: 3.

Решение. Если большее основание a, а меньшее b, то в обозначениях рис.



расстояние между серединами диагоналей трапеции равно

$$d = GH = EF - (EG + HF) = \frac{a+b}{2} - \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\right) = \frac{a-b}{2}.$$

Отсюда $b = a - 2d$.

4. В десятичной записи числа 4041^{3456} найдите предпоследнюю цифру.

Ответ: 4.

Решение. При перемножении натуральных чисел на две последние цифры произведения влияют только по две последние цифры множителей. Выпишем последовательность цифр в двух младших разрядах для степеней числа 41: 41, 81, 21, 61, 01, 41,.... Эта последовательность имеет период 5.

5. При каком наименьшем a система уравнений

$$\begin{cases} |x| = a - y, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

совместна (т. е. имеет хотя бы одно решение)?

Ответ: -3.

Решение. Нарисуйте графики уравнений.

6. Сколько натуральных чисел $\leqslant 10^{10}$ после зачёркивания первой цифры уменьшаются в 57 раз?

Ответ: 7.

Решение. Искомое число представим в виде $k \cdot 10^n + m$, где k — первая цифра числа, а $m < 10^n$ — число, получающееся после зачёркивания первой цифры. Тогда $k \cdot 10^n + m = 57m$ и $k \cdot 10^n = 56m$. Так как $56m$ делится на 7, цифра k может быть только семёркой. Значит, $10^n = 8m$. Отсюда $n \geqslant 3$. С другой стороны, $n < 10$. Искомые числа имеют вид $7125 \cdot 10^{n-3}$, где $n = 3, 4, \ldots, 9$.

7. В ребусе

$$\mathbf{Ф} < \mathbf{И} < \mathbf{З} > \mathbf{И} > \mathbf{К} > \mathbf{А}$$

разные буквы заменяют разные нечётные цифры. Сколько решений имеет ребус?

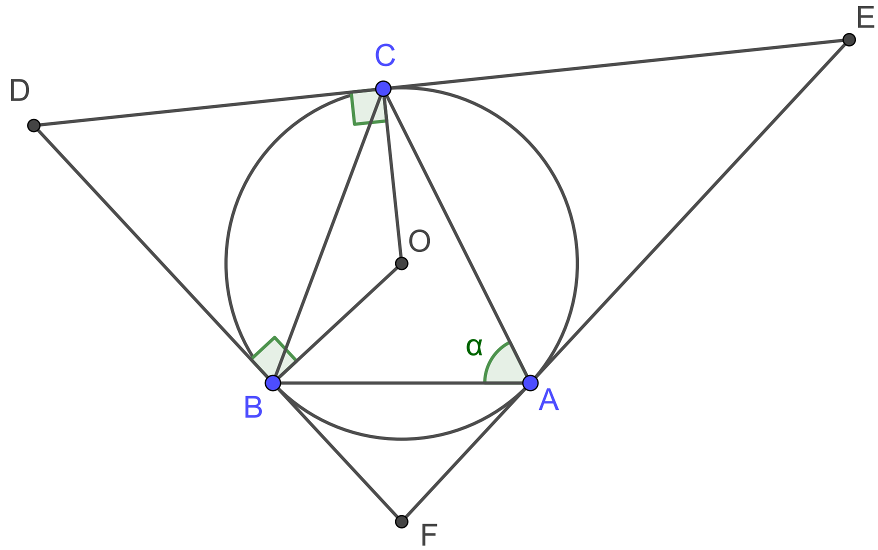
Ответ: 3.

Решение. В ребусе участвует 5 цифр. По условию, все они нечётные. Очевидно, что цифра **З** — самая большая (т. е. **З** $= 9$), **И** — вторая по величине (**И=7**). Букву **Ф** теперь выбираем из трёх оставшихся цифр (1, 3 и 5), после чего оставшиеся буквы определяются однозначно.

8. Вокруг треугольника ABC с углами $37°, 63°, 80°$ описали окружность, к которой провели касательные в точках A, B и C. Найдите наибольший угол (в градусах) треугольника, образованного этими касательными.

Ответ: $106°$.

Решение. Пусть O — центр описанной окружности, DEF — треугольник, образованный касательными (см. рис.), $\angle BAC = \alpha$.



Центральный угол в два раза больше вписанного, опирающегося на ту же дугу. Поэтому $\angle BOC = 2\alpha$. В четырёхугольнике $ABDC$ есть ещё два прямых угла (между касательной и радиусом). Отсюда $\angle BDC = 180° - 2\alpha$. Аналогично находятся два других угла треугольника DEF.