Муниципальный этап олимпиады школьников по математике
Ноябрь 2014 г.
Решения задач

9 класс

1. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$(x^2+x)^2-100(x^2+x)+3=0.$$

Ответ: 202.

Решение. Введём новую переменную $t=x^2+x$. Имеем уравнение

$$t^2-100t+3=0. \qquad (*)$$

У этого уравнения (ввиду положительности дискриминанта) есть корни t_1 и t_2, и их сумма, по теореме Виета, равна 100. Кроме того, как видно из уравнения (*), $t_{1,2}>0$. Уравнения $x^2+x-t_i=0$ $(i=1,2)$ имеют корни (так как дискриминант $1+4t_i>0$) $x_{1,2,3,4}$, причём $x_1+x_2=x_3+x_4=-1$, $x_1x_2=-t_1$, $x_3x_4=-t_2$. Теперь легко вычислить сумму квадратов корней:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=1+2t_1.$$

Аналогично $x_3^3+x_4^2=1+2t_2$. Отсюда

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=2+2(t_1+t_2)=2+2\cdot 100=202.$$

Оценивание. Полное решение — 7 баллов. Если нет обоснования существования четырёх действительных корней, минус 2 балла. За арифметические ошибки минус 1 балл.

2. С натуральным числом разрешается проделывать такие операции:
1) приписать в конце цифру 0;
2) приписать в конце цифру 4;
3) разделить на 2 (если число чётно).

Как из числа 2, выполнив несколько операций, получить число 2014?

Решение. Вместо того, чтобы получить из числа 2 число 2014, мы получим из числа 2014 число 2 с помощью обратных операций:
1) вычёркивание в конце цифры 0;
2) вычёркивание в конце цифры 4;
3) умножение числа на 2.

Имеем:

$$2014\to 201\to 402\to 804\to 80\to 8\to 16\ \to 32\ \to 64\to 6\to 12\to 24\to 2.$$

Оценивание. За верное решение 7 б.

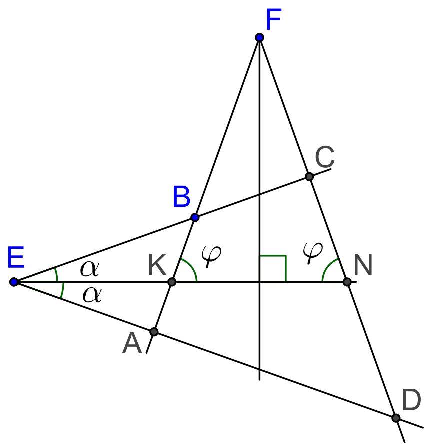
3. Существуют ли такие целые числа m и n, что $2015 = \dfrac{m^8}{n^9}$?

Ответ: да, например $n = 2015^8$, $m = 2015^7$.

Оценивание. За верный пример 7 б. Только ответ (без примера) — 0 б.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Прямые DA и CB пересекаются в точке E, а прямые AB и DC — в точке F. Известно, что биссектрисы углов BEA и BFC перпендикулярны. Докажите, что вокруг $ABCD$ можно описать окружность.

Доказательство.



Пусть K и N — точки пересечения биссектрисы угла AEB и прямых AF и DF. В треугольнике KFN биссектриса является высотой. Поэтому этот треугольник равнобедренный. Обозначим $\angle FKN = \angle FNK = \varphi$. Пусть также $\angle BEK = \angle AEK = \alpha$. Угол DAB — внешний для треугольника EAK, он равен сумме двух внутренних углов этого треугольника:

$$\angle DAB = \angle AEK + \angle EKA = \angle AEK + \angle BKN = \alpha + \varphi.$$

С другой стороны,

$$\angle DCB = \angle NCE = 180^\circ - \angle NEC - \angle ENC = 180^\circ - \alpha - \varphi.$$

Сложив полученные равенства, получим $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$. Отсюда следует, что $ABCD$ — вписанный четырёхугольник.

Оценивание. За верное решение 7 б. Только ответ (без достаточного обоснования) — 0 б.

5. Имеются стакан, кружка и кофейник объёмом 200, 300 и 400 мл соответственно. В кружке 200 мл кофе и 6 г сахара, в кофейнике — 300 мл кофе и 12 г сахара. Стакан пуст. Можно ли с помощью переливаний добиться того, чтобы в кружке и кофейнике оказалось по 9 г сахара? (Дополнительных ёмкостей и средств измерений нет, объёмом сахара пренебречь.)

Ответ: нельзя.

Решение. По смыслу задачи, в каждый момент времени (т. е. после каждого переливания) количество жидкости в любой ёмкости кратно 100 мл.

Пусть сахара в кружке и кофейнике стало по 9 г, причём в кружке x мл кофе. Тогда в кофейнике $500 - x$ мл кофе (так как общее количество сахара не изменилось, общий объём кофе тоже не изменился, и стакан должен быть при этом пустым). Начальные концентрации сахара в кофе соответственно $\frac{3}{100}$ г/мл и $\frac{4}{100}$ г/мл, при любых переливаниях концентрация будет оставаться в этих же пределах. Поэтому справедливы неравенства

$$\frac{3}{100} \leqslant \frac{9}{x} \leqslant \frac{4}{100}; \quad \frac{3}{100} \leqslant \frac{9}{500 - x} \leqslant \frac{4}{100}.$$

Решив эти неравенства, получим соответственно $225 \leqslant x \leqslant 300$ и $200 \leqslant x \leqslant 275$. Значит, $225 \leqslant x \leqslant 275$ — величина x не кратна 100.

Оценивание. За верное решение 7 б. Только ответ (без достаточного обоснования) — 0 б.