Открытая областная олимпиада по математике

Очный тур 30 ноября 2008 г.

Решения задач

8 класс

1. Может ли быть верным равенство

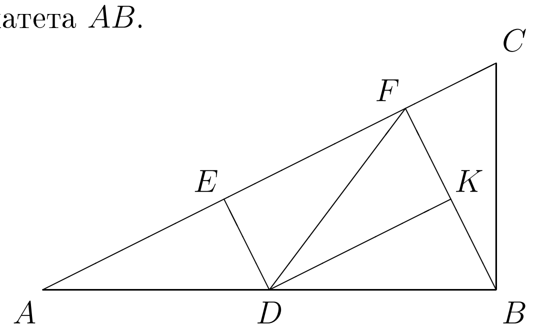
$$\text{Р} \times \text{Е} \times \text{Ш} \times \text{И} = \text{С} \times \text{А} \times \text{М},$$

если в нём каждая буква заменяет некоторую цифру, причём разные буквы заменяют разные цифры?

Решение. Очевидно, что среди семи цифр, участвующих в равенстве, нет нуля (иначе одно произведение равно нулю, а другое нет). Нет и цифры 7 (если она присутствует, то одно из произведений делится на 7, а другое нет). По аналогичной причине отсутствует и цифра 5. Остаётся семь цифр. Так как в ребусе присутствуют семь разных букв, каждая из указанных цифр встретится по одному разу. Если бы равенство из условия задачи выполнялось, то произведение $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 = 2^7 \cdot 3^4$ было бы квадратом целого числа $\text{С} \times \text{А} \times \text{М}$. Это невозможно, так как в разложении числа x на простые множители двойка в нечётной степени.

2. В прямоугольном треугольнике один катет больше другого в два раза. Разрежьте этот треугольник на пять равных треугольников.

Решение. Пусть в треугольнике ABC угол B — прямой, $BC = x$, $AB = 2x$, точка D — середина катета AB.



Из точек D и B опустим перпендикуляры DE и BF на сторону AC, а из точки D перпендикуляр DK к отрезку BF. Отрезки DE, DF, DK и BF делят треугольник ABC на пять равных треугольников. Действительно, эти треугольники подобны, и у всех длина гипотенузы равна x ($FD = x$ в силу того, что FD — медиана прямоугольного треугольника AFB).

3. Пусть натуральные числа a, b и c таковы, что числа a^2+2b+1, b^2+2c+1 и c^2+2a+1 являются квадратами целых чисел. Следует ли отсюда, что $a = b = c$?

Ответ: да, следует.

Решение. Число $(a+1)^2$ — наименьший квадрат натурального числа, больший чем a^2. Поэтому

$$a^2 + 2b + 1 \geqslant (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1,$$

откуда $b \geqslant a$. Точно так же получаем, что $c \geqslant b$, $a \geqslant c$. Из полученных трёх неравенств вытекает, что $a = b = c$.

4. Найдите все натуральные числа n, обладающие следующим свойством: n равно сумме трёх различных натуральных делителей числа $n - 1$.

Ответ: 13; 31.

Решение. Пусть $n = a + b + c$ и $n - 1$ делится на a, b и c. Можно считать, что $a > b > c$.

Поскольку $a + b + c - 1$ делится на a, число $b + c - 1$ также делится на a. В то же время $b + c - 1 < 2a$. Отсюда следует, что $b + c - 1 = a$.

Итак, $n = a + b + c = (b + c - 1) + b + c = 2b + 2c - 1$. Из делимости на b числа $n - 1 = 2b + 2c - 2$ вытекает делимость на b числа $2c - 2$. Так как $2c - 2 < 2b$, число $2c - 2$ равно 0 или b. В первом случае $c = 1$, но тогда $a = b$, что противоречит условию. Значит,

$$b = 2c - 2, \quad a = 3c - 3, \quad n = 6c - 5, \quad n - 1 = 6(c - 1).$$

Поскольку $c - 1$ и c — взаимно простые числа, из того, что $6(c-1)$ делится на c вытекает, что 6 делится на c. Переберём все делители числа 6.

Если $c = 1$, то $b = 0$. Если $c = 2$, то $b = 2 = c$.

При $c = 3$ получаем $b = 4, a = 6$ и $n = 6 + 4 + 3 = 13$, а при $c = 6$ — $b = 10, a = 15$ и $n = 15 + 10 + 6 = 31$.