Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2021-2022 учебный год

Решения задач и критерии оценивания. 10 класс

$\boxed{10.1}$ *В таблицу 3×3 расставили неповторяющиеся натуральные числа, не большие 20. Могло ли оказаться, что для любых двух соседних по стороне клеток отношение большего числа к меньшему – целое?*

Решение: да, могло, например, так:

10	2	6
5	1	3
20	4	12

Критерии: Полное решение — 7 баллов. Попытки объяснения, каким образом был получен пример, не должны влиять на итоговую оценку, если правильный пример предъявлен.

$\boxed{10.2}$ *Компания друзей вышла на утреннюю пробежку вокруг озера. Во время пробежки один за другим они понимали, что не рассчитали свои силы, и переходили с бега на шаг. Один из друзей подсчитал, что он пробежал восьмую часть от суммарного расстояния, которое пробежала вся компания, а прошёл шагом десятую часть суммарного расстояния, которое они прошли пешком. Сколько всего человек было на прогулке?*

Решение 1: Пусть считавший человек пробежал x-ую часть дороги, тогда $0 < x < 1$, а прошёл он $(1-x)$-ую часть пути. Если всего было n человек, то по условию суммарный путь пройденный компанией (выраженный в терминах частей) – это с одной стороны n, а с другой $8x + 10(1-x) = 10 - 2x$. Значит $2x$ – целое число, поэтому единственный вариант $x = 0.5$, а $n = 9$.

Решение 2: Если этот друг пробежал a км и прошёл пешком b км, то суммарный путь всей компании с одной стороны $8a + 10b$, а с другой $n(a+b)$. Таким образом, $n = \frac{8a+10b}{a+b} = 9 + \frac{b-a}{a+b}$. Так как a и b — ненулевые числа, то последняя дробь может быть целой только если $a = b$, в противном случае модуль ненулевого числителя будет меньше модуля знаменателя, и дробь не будет целой.

Критерии: Составлено правильное уравнение на суммарную длину пути, но не сделаны выводы, — 2 балла.

$\boxed{10.3}$ *Докажите, что при всех положительных x верно неравенство*

$$(x+1)\sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{2}(x+\sqrt{x}).$$

Решение 1: Это неравенство является произведением двух неравенств: $\sqrt{x+1} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{x})$ и $x+1 \geqslant 2\sqrt{x}$, которые оба равносильны неравенству $(1-\sqrt{x})^2 \geqslant 0$ (для этого первое неравенство нужно предварительно возвести в квадрат).

Решение 2: Обе части неравенства положительны, поэтому перейдём к равносильному неравенству, возведя обе части в квадрат:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \geqslant 2x^2 + 4x\sqrt{x} + 2x.$$

Таким образом, осталось показать

$$x^3 + x^2 + x + 1 \geqslant 4x\sqrt{x}.$$

Это действительно так, потому что это неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для 4 чисел (т.н. неравенство Коши). Другое объяснение справедливости этого неравенства вытекает из двух промежуточных неравенств $x^3 + 1 \geqslant 2x\sqrt{x}$ и $x^2 + x \geqslant 2x\sqrt{x}$, сворачивающихся до полных квадратов.

Критерии:

- Использовано какое-либо из классических неравенств без их доказательства — баллы не снимать;

- Не пояснены переходы между неравенствами (равносильность, от более сильного к более слабому) — снимать 2 балла.

$\boxed{10.4}$ *Для каждого целого числа от 10 до 2021 нашли произведение цифр, а потом все полученные результаты сложили. Какая сумма получилась?*

Решение: Рассмотрим произведение $(1+2+3+\cdots+9)\cdot(0+1+2+\cdots+9)$. Если раскрыть скобки, то получатся произведения пары цифр, образующиеся из всех двузначных чисел. Аналогично в произведении

$$(1+2+3+\cdots+9)\cdot(0+1+2+\cdots+9)\cdot(0+1+2+\cdots+9)$$

после открытия скобок получатся все комбинации цифр из трехзначных чисел, а

$$1\cdot(0+1+2+\cdots+9)\cdot(0+1+2+\cdots+9)\cdot(0+1+2+\cdots+9)$$

даст все комбинации для чисел от 1000 до 1999. Числа от 2000 до 2021 дают нулевое произведение цифр. Поэтому ответ $45^2+45^3+45^3=184\ 275$.

Критерии:

- Ответ дан формулой $45^2+45^3+45^3$ и не подсчитан окончательный ответ в десятичной форме — баллы не снимать;

- Правильно подсчитана только сумма произведений для двузначных чисел — 1 балл.

$\boxed{10.5}$ *В $\triangle ABC$ провели биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке O. Оказалось, что площади $\triangle OC_1B$, $\triangle OB_1A$ и $\triangle OA_1C$ совпадают. Верно ли, что $\triangle ABC$ равносторонний?*

Решение 1: Обозначим длины сторон треугольника $AB=c, BC=a, CA=b$. У трёх треугольников из условия равны площади и высоты из вершины O (т.к. O – центр вписанной окружности), поэтому равны основания $AB_1=BC_1=CA_1$. Используя факт, что биссектриса делит сторону в отношении прилегающих сторон, это означает

$$\frac{bc}{a+c}=\frac{ac}{a+b}=\frac{ab}{b+c}.$$

Если a — наибольшая из трёх сторон, то из первого равенства $b\geqslant c$ (в противном случае у первой дроби числитель будет меньше, а знаменатель больше, чем у второй дроби), и, аналогично, из второго равенства — $c\geqslant b$. Значит, стороны b и c равны, а тогда сторона a равна им же.

Окончание решения, использующего приведённые выше формулы отрезков, может быть алгебраическим, через явное выражение одной стороны через другие.

Критерии:

- Замечено, что отрезки AB_1, BC_1 и CA_1 равны — 1 балл;

- Выведены формулы для длин отрезков, на которые биссектриса разбивает сторону, — 1 балл;

- Если эти формулы отрезков выписаны правильно, но без вывода, — 1 балл.